Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 10

PD Dr. Sebastian Heller 30. Juni 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 12. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1.

a) Welche Bedingungen müssen $r(v) > 0$ und $h(v)$ erfüllen, damit

$$f(u, v) = (r(v)\cos(u), r(v)\sin(u), h(v))$$

die Sphäre S^2 (ohne Pole und einen Meridian) parametrisiert? Dabei soll die Orientierung der Karte mit einem nach außen zeigenden Normalenvektorfeld kompatibel sein.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten der 1. Fundamentalform bezüglich der Koordinaten (u, v). Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die Parametrisierung winkeltreu ist? Wann ist sie flächentreu?

c) Zeigen Sie, daß $r(v) = \frac{1}{\cosh(v)}$ und $h(v) = \tanh(v)$ eine winkeltreue Parametrisierung liefert.

d) Zeigen Sie, daß man mit $h(v) = v$ und entsprechendem $r(v)$ eine flächentreue Parametrisierung erhält.

e) Gibt es eine Wahl von r und h, so daß die Parametrisierung von S^2 gleichzeitig winkeltreu und flächentreu ist?

Aufgabe 2.

a) Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Geodätische, wenn ihre geodätische Krümmung verschwindet.

b) Wann sind die Kurven $u \mapsto f(u, v_0)$ bzw. $v \mapsto f(u_0, v)$ auf einer Rotationsfläche

$$f(u, v) = (r(v)\cos(u), r(v)\sin(u), h(v))$$

Geodätische? Interpretieren Sie die Bedingungen geometrisch. Welche der beiden Familien von Parameterlinien besteht nach geeigneter Umparametrisierung von f nur aus Geodätischen?

Aufgabe 3.

a) Zeige Sie: für eine Fläche mit 1. Fundamentalform $g = e^{2\lambda}(du^2 + dv^2)$ gilt

$$K = -e^{-2\lambda}\Delta\lambda,$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 u} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}$.

b) Berechnen Sie K für

$$g = \frac{4}{(1 + k(u^2 + v^2))^2}(du^2 + dv^2).$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) $SO(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit der $n \times n$–Matrizen. Was ist der Tangentialraum in Id?

b) Ist X eine schiefsymmetrische Matrix, so ist die Kurve $\gamma(t) = \exp(tX)$ eine Geodätische von $SO(n)$ bezüglich der induzierten Metrik.

(Tip: die Euklidische Metrik auf den $n \times n$–Matrizen ist $< A, B >= tr(A^* B)$. Die Gruppe $SO(n)$ wirkt auf den $n \times n$–Matrizen von links und rechts als Gruppe von Isometrien. Bestimmen Sie den Normalenraum an $SO(n)$ im Punkt Id. Bestimmen Sie den Tangential– und Normalenraum an $SO(n)$ in einem Punkt $G \in SO(n)$. Folgern Sie, daß $\gamma''(t)$ im Normalenraum an $SO(n)$ im Punkt $\gamma(t)$ liegt.)