Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2011/12

Analysis III : Grundbegriffe der Topologie

Dr. Sebastian Heller 14. Oktober 2011

Im Folgenden sammeln wir einige wichtige topologische Begriffe und Fakten aus der Analysis II Vorlesung und formulieren sie in der Sprache der abstrakten topologischen Räume. Alle Beweise übertragen sich direkt aus der Analysis II Vorlesung und werden daher ausgelassen. (Was sich *nicht* oder nicht so einfach übertragen läßt, wurde damals durch ein '*' ausdrücklich so gekennzeichnet...)

Definition: Eine **Topologie** auf einer Menge X kann man auf viele verschiedene, aber äquivalente Arten definieren. Zum Beispiel:

(i) durch Auszeichnung einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ von *offenen* Teilmengen, die $\emptyset$ und X enthält und stabil ist unter endlichen Durchschnitten sowie unter beliebigen Vereinigungen,

(ii) durch Auszeichnung einer Menge $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ von *abgeschlossenen* Teilmengen, die $\emptyset$ und X enthält und stabil ist unter endlichen Vereinigungen sowie unter beliebigen Durchschnitten,

(iii) durch Auszeichnung der Menge der *Umgebungen* $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ eines jeden Punktes $x \in X$, so daß gilt:
- jede Umgebung von x enthält den Punkt x selbst,
- der Raum X selbst ist Umgebung eines jeden Punktes $x \in X$,
- jede Obermenge einer Umgebungen von x ist wieder Umgebung von x (d.h., eine Menge, die eine Umgebung von x enthält, ist selbst auch eine Umgebung von x),
- der Durchschnitt zweier Umgebungen eines Punktes x ist wieder eine Umgebung von x und
- jede Umgebung von x enthält eine Umgebung von x, die Umgebung aller ihrer Elemente ist.

Wegen der Einfachheit der Axiome wird meist (i) bzw. (ii) für die Definition einer Topologie herangezogen.

Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zugängen ist wie folgt: (i)$\leftrightarrow$(ii) eine Teilmenge von X ist offen genau dann, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist; (i)$\rightarrow$(iii) eine Teilmenge $U \subset X$ ist Umgebung von x genau dann, wenn es eine offene Menge gibt welche x enthält und in U enthalten ist; (iii)$\rightarrow$(i) eine Menge ist offen genau dann, wenn sie Umgebung aller ihrer Elemente ist.

Beispiele:

- Jede Menge X trägt die *triviale Topologie* $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ und die *diskrete Topologie* $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.
- Die *metrische Topologie* eines metrischen Raumes (oder normierten Vektorraumes) ist dadurch gegeben, daß man als Umgebungen eines Punktes x alle Obermengen von offenen ϵ–Bällen um x nimmt, d.h. alle Mengen, die einen offenen ϵ–Ball um x enthalten. Die offenen Mengen O sind dann genau die Mengen, in denen um jeden Punkt $x \in O$ auch ein offener ϵ–Ball enthalten ist.
- Die *Standardtopologie* des $\mathbb{R}^n$ (bzw. eines endlichdimensionalen Vektorraumes) ist die von einer beliebigen Norm, z.B. dem Euklidischen Abstand, induzierte Topologie. Da alle Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent sind, ist diese Topologie unabhängig von der Wahl der Norm. Genauso wird auf allen Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Standardtopologie induzierte (vgl. Teilraumtopologie).

Offener Kern, Abschluß, Rand:

- Der *offene Kern* oder das *Innere* $\mathring{Y}$ einer Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raumes ist die größte offene Menge, die in Y enthalten ist.
- Der *Abschluß* $\bar{Y}$ von $Y \subset X$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die Y enthält. Der Abschluß ist also das Komplement des offenen Kernes des Komplementes.
- Der *Rand* ∂Y von $Y \subset X$ ist die abgeschlossene Menge $\bar{Y} \setminus \mathring{Y}$.

Eine Menge Y ist offen genau dann, wenn $Y = \mathring{Y}$; sie ist abgeschlossen genau dann, wenn $Y = \bar{Y}$. Man könnte Topologien also auch einführen, indem man die Operationen $^\circ$ bzw. $^-$ axiomatisiert[1].

In der Umgebungssprechweise drücken sich obige Definitionen so aus:

- $x \in \mathring{Y}$ genau dann, wenn Y Umgebung von x ist,
- $x \in \bar{Y}$ genau dann, wenn jede Umgebung von x die Menge Y schneidet,
- $x \in \partial Y$ genau dann, wenn jede Umgebung von x sowohl Punkte von Y als auch Punkte des Komplementes enthält.

Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raumes heißt *dicht* falls $\bar{Y} = X$.

Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

Konvergenz von Folgen: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum *konvergiert* gegen x, falls in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten sind. Der Punkt x wird dann als *Grenzwert* der Folge bezeichnet.

[1] Derartige Axiome hat Kazimierz Kuratowski um 1920 eingeführt.

Ein topologischer Raum heißt *Hausdorff*, falls jedes Paar verschiedener Punkte disjunkte Umgebungen besitzt. In Hausdorff–Räumen sind Grenzwerte konvergenter Folgen eindeutig, im Allgemeinen nicht.

Satz: Für $A \subset X$ Teilmenge eines topologischen Räumen gilt: A abgeschlossen $\Rightarrow$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A welche gegen $x \in X$ konvergiert ist auch $x \in A$.

Die Umkehrung gilt zwar in metrischen Räumen, aber nicht allgemein! Auch machen in topologischen Räumen die Begriffe *Cauchy–Folge* und *Vollständigkeit* keinen Sinn. Es ist allgemein so, daß man in topologischen Räumen vorsichtig sein muß, wenn man mit Folgen argumentiert[2]. Im Gegensatz zu metrischen Räumen sind zum Beispiel in allgemeinen topologischen Räumen die Begriffe stetig und folgenstetig (s.u.) bzw. kompakt und folgenkompakt (s.u.) *nicht* äquivalent!

Stetigkeit: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig im Punkt* x, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, deren Bild $f(U)$ ganz in V liegt.

Eine Abbildung heißt *stetig*, wenn sie stetig in allen Punkten ist. Dazu ist äquivalent, daß die Urbilder von offenen Mengen wieder offen sind. Die Verkettung von stetigen Abbildungen ist stetig.

Jede stetige Abbildung ist auch *folgenstetig*, d.h. bildet konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab. Die Umkehrung gilt, im Gegensatz zu metrischen Räumen, für allgemeine topologische Räume nicht.

Teilraum– und Produkttopologien: Sei $Y \subset X$ Teilmenge eines topologischen Raumes. Die *Teilraumtopologie* (auch *induzierte Topologie, relative Topologie, Spurtopologie* oder *Unterraumtopologie*) auf Y ist die kleinste Topologie auf Y bezüglich der die Inklusion $i\colon Y \to X$ stetig ist. Die offenen Mengen von Y sind genau die Mengen der Form $Y \cap O$, wobei O offen in X ist.

Sind X_1, X_2 topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X_1 \times X_2$ ist die kleinste Topologie, bezüglich der beide Projektionen $pr_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$ stetig sind. Offene Mengen sind genau die Vereinigungen von Mengen der Form $O_1 \times O_2$, wobei $O_i \subset X_i$, $i = 1, 2$ offen sind. Diese Konstruktion funktioniert analog auch für Produkte beliebiger Familien von topologischen Räumen. (Die offenene Mengen von $\prod_{i\in I} X_i$ sind dann Vereinigungen von Mengen der Form $pr_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap ... \cap pr_{i_n}^{-1}(O_{i_n})$ mit $O_{i_j} \subset X_{i_j}$, $j = 1,...,n$ offen und $\{i_1, ..., i_n\} \subset I$.)

Teilraum– und Produkttopologien sind Beispiele für sogenannte *Initialtopologien*, da sie definiert werden als minimale Topologien bezüglich derer Abbildungen aus dem Raum heraus stetig werden. Analog spricht man von *Finaltopologien*, wenn man Topologien definiert als maximale Topologien bezüglich derer Abbildungen

[2] Der Grund ist, daß es in allgemeinen Räumen "nicht genügend Folgen gibt" und man stattdessen sog. 'Filter' benutzen müßte; auf diese wollen wir aber nicht näher eingehen.

in einen Raum hinein stetig werden. Ein Beispiel hierfür sind *Quotiententopologien.*

Zusammenhang: Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn jede disjunkte Zerlegung des Raumes in zwei offene Teilmengen trivial ist, d.h. eine der beiden Teilmengen die leere Menge ist. Ein Raum X ist also genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind.

Beispiel: Intervalle sind die zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Satz: Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist X zusammenhängend, so ist auch das Bild $f(X)$ zusammenhängend.

Das verallgemeinert den Zwischenwertsatz aus der Analysis I Vorlesung, welcher mit $Y = \mathbb{R}$ aus obigem Beispiel folgt.

Ein topologischer Raum heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei seiner Punkte durch eine stetige Kurve verbinden lassen. Ein wegzusammenhängender Raum ist auch zusammenhängend. Die Umkehrung gilt nicht.

Es gilt:

i. Ist $A \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge und $A \subset B \subset \bar{A}$, so ist auch B zusammenhängend.
ii. Sind $A_i \subset X$, $i \in I$ zusammenhängende Teilmengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

Die *Zusammenhangskomponente* Γ_x des Punkt $x \in X$ eines topologischen Raumes ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X welche x enthalten. Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängende Mengen; die Zusammenhangskomponenten zweier Punkte sind entweder gleich oder disjunkt (siehe ii. oben). Daher kann man jeden Raum disjunkt zerlegen in seine Zusammenhangskomponenten. Diese sind abgeschlossen (siehe i. oben). Falls es nur endlich viele Komponenten gibt, sind diese damit auch offen.

Kompaktheit: Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn er Hausdorff[3] ist und jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Jeder kompakte Raum ist auch *folgenkompkt*, d.h. jede Folge hat eine konvergente Teilfolge. Die Umkehrung gilt in allgemeinen topologischen Räumen nicht—im Gegensatz zu metrischen Räumen.

Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt. Weiterhin gilt:

- $K \subset X$ kompakt, X Hausdorff–Raum $\Rightarrow K \subset X$ abgeschlossen
- $K \subset X$ kompakt, X metrischer Raum $\Rightarrow K \subset X$ abgeschl. und beschränkt

[3] Die Hausdorff–Eigenschaft wird in der Definition von Kompaktheit oft weggelassen; da sie in metrischen Räumen automatisch erfüllt ist, macht das in den meisten Fällen keinen Unterschied.

- $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschl. und beschränkt (Heine–Borel)

Satz: Sei $f: X \to Y$ eine steige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorff–Raum. Dann ist das Bild $f(X)$ kompakt.

Wählt man $Y = \mathbb{R}$, so erhält man mit obiger Charakterisierung von kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Korollar: Eine stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum nimmt Maximum und Minimum an.

Das verallgemeinert einen weiteren wichtigen Satz aus der Analysis I Vorlesung.

Was ist Topologie eigentlich genau? Der Begriff *Topologie* setzt sich zusammen aus den griechischen Worten *Topos* und *Logos*. Ersteres bedeutet “Ort”, letzteres “Wort” oder “Lehre”. Topologie bedeutet also in etwa “Lehre von der Lage”[4].

Die Topologie – genauer: die sog. *allgemeine* bzw. *mengentheoretische Topologie* – befaßt sich mit den Grundstrukturen der Mathematik, die Konzepte wie Nachbarschaft, Konvergenz, Stetigkeit etc. konkretisieren. Weitere Teilgebiete der Topologie wie die sog. *algebraische*, *geometrische* oder *Differentialtopologie* untersuchen Invarianten von Räumen unter stetigen oder differenzierbaren Transformationen – zum Beispiel die “Anzahl der Löcher” eines Raumes oder die “Verknotung” einer Kurve. Im Vergleich zur Geometrie, die mit Begriffen wie Länge, Winkel oder ähnlichem operiert, kann man die Topologie auch als eine Art “Gummiband”–Geometrie ansehen.

Interessant ist in diesem Zusammenhang der erste Absatz des Wikipedia–Eintrags zu “Topologie” (stand 14.10.2011):

> Die *Topologie* (gr. topos, Ort, Platz und -logie) oder *Analysis situs*, wie sie früher meistens genannt wurde, ist ein Teilgebiet der Mathematik. Sie ist im Wesentlichen eine Schöpfung des 20. Jahrhunderts und bereits seit Jahrzehnten als Grundlagenfach anerkannt. Insofern hat sie (zusammen unter anderem mit der linearen Algebra und der Maßtheorie) das Erbe der Geometrie angetreten. (...)

In der Tat stellt die mengentheoretische Topologie, genauso wie die Algebra und zum Beispiel die abstrakte Maßtheorie, wichtige Grundstrukturen bereit, die in vielen mathematischen Teildisziplinen benötigt werden. Der Beginn der Axiomatisierung vieler dieser Grundstrukturen ist dabei am Anfang des 20. Jahrhunderts

[4] Im 19. Jahrhundert benutzte man dafür auch den Begriff *Analysis situs*.

anzusiedeln. Zu behaupten, die Topologie sei eine Schöpfung des 20. Jahrhunderts, verkennt dabei natürlich, daß die "Axiomatisierer"[5] aus dem reichen Erfahrungsschatz des 19. Jahrhunderts schöpfen konnten[6]. Die Entwicklung der axiomatischen Theorie ist nicht nur ein Neuanfang, sondern auch – und vor allem – eine Weiterentwicklung.

Die Bemerkung vom "Erbe der Geometrie" am Ende des Zitates zeigt, daß im Eifer des Gefechts der großen Axiomatisierungswelle unter General Nicolas Bourbaki die gute alte Geometrie fast unter die Räder gekommen wäre. Im mathematischen Curriculum vieler Universitäten ist sie in der Tat heutzutage oft nicht existent. Aktuell scheint es aber eine Renaissance der klassischen Geometrie zu geben, ausgelöst unter anderem durch die rasante Entwicklung der Computergraphik. Auch in der Mathematik währen Modewellen also nicht ewig und vermeintlich nutzlose "reine" Mathematik kann plötzlich sehr "angewandt" sein.

Literatur: Eine kurze Einführung (ca. 20 Seiten) in die allgemeine Topologie finden Sie zum Beispiel in Anton Deitmar's Analysis II Skript.

Falls Sie weitergehende Fragen oder größeren Wissensdurst haben, hier noch zwei deutsche Standardwerke zur allgemeinen Topologie (das erste zum Nachschlagen, das zweite zum Schmöckern):

- Boto von Querenburg: Mengentheoretische Topologie. 3. Auflage. Springer, Berlin 2001.
- Klaus Jänich: Topologie. 8. Auflage. Springer, Berlin 2005.

[5] Im Falle der Topologie muß man hier vor allem Felix Hausdorff nennen, der 1914 erstmals Axiome für Umgebungen von Punkten einführte.

[6] Die für die Topologie bahnbrechenden Vorarbeiten von Bernhard Riemann und Henri Poincaré zum Beispiel stammen aus dem 19. Jahrhundert.