Übungen zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. Ch. Hering — Wintersemester 2007/2008

1. Übungsblatt

Abgabe: **Di, 23.10.07** in der Vorlesung.

Aufgabe 1
Prüfe, ob $(M, \circ)$ ein Magma, eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe oder sogar eine abelsche Gruppe ist in den folgenden Fällen:

(a) M ist eine beliebige, nichtleere Menge, und es gilt $x \circ y = x \ \forall x, y \in M$.

(b) $M = \mathbb{Q} \backslash \{-1\}$, und es gilt $a \circ b = a + b - ab \ \forall a, b \in M$.

(c) $M = \mathbb{Q} \backslash \{-1\}$, und es gilt $a \circ b = a + b + ab \ \forall a, b \in M$.

(d) K ist ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $M = End_K(V)$, und es gilt $x \circ y = xy - yx \ \forall x, y \in M$.
(Dabei bezeichne xy das gewöhnliche Produkt von x und y, $x + y$ die gewöhnliche Summe von x und y in M und $-y$ das Inverse zu y in $(M, +)$).

Bemerkung: Ist $\circ$ wie im Teil (d) definiert, so ist $(M, +, \circ)$ eine Lie-Algebra.
Prüfe jeweils auch, ob $(M, \circ)$ kommutativ ist.

Aufgabe 2
Sei M ein Monoid mit Einselement e und $E = \{x \in M |$ es existieren Elemente $y, z \in M$ mit $yx = xz = e\}$. Zeige: E ist eine Gruppe. (E heißt die Einheitengruppe von M.)

Aufgabe 3
Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$.

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $ab^{-1} \in H \ \forall a, b \in H$

(ii) $ab \in H \ \forall a, b \in H$ und $a^{-1} \in H \ \forall a \in H$.

(b) Zeige: Ist $|H| < \infty$ und $ab \in H \ \forall a, b \in H$ so ist H eine Untergruppe von G.

Aufgabe 4
Sei $(M, \circ)$ ein Magma und

$$Aut(M) := \{\varphi : M \to M | \ \varphi \text{ ist bijektiv}, (x \circ y)^\varphi = x^\varphi \circ y^\varphi \ \forall x, y \in M\}.$$

Zeige, dass $Aut(M)$ eine Untergruppe von $Sym(M)$ ist.