
ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG ALGEBRA I

Prof. Dr. Ch. Hering

Wintersemester 2007/2008

2. Übungsblatt

Abgabe: **Di, 30.10.07** in der Vorlesung.

Aufgabe 5

Seien $K \leq \mathbb{R}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und G die Menge der $n \times n$ -Matrizen über K der Determinante $\neq 0$. Zeige, dass G zusammen mit der Matrix-Multiplikation eine Gruppe ist. Sei U die Menge der Elemente u aus G so dass

- (a) $\det u = 1$,
- (b) $\det u = 3$,
- (c) $\det u \leq 5$,
- (d) $\det u \in \mathbb{N}$ und $2 \mid \det u$ bzw.
- (e) $\det u \in \mathbb{N}$ und $5 \mid \det u$.

Ist U eine Untergruppe von G ?

Aufgabe 6

Seien $G = (\mathbb{R}^2, +)$, $(x, y) \in G \setminus \{0\}$ und $U = \{(rx, ry) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Zeige, dass U eine Untergruppe von G ist. Sei \mathfrak{R} die Menge bestehend aus allen Restklassen von U in G . Können Sie \mathfrak{R} geometrisch interpretieren? Was können Sie über die Ordnung $|U|$ und den Index $|G : U|$ sagen?

Aufgabe 7

Sei G eine Gruppe, so dass

- (a) $|G| = 2$,
- (b) $|G| = 6$ bzw.
- (c) $|G| = 2n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \equiv 1 \pmod{2}$.

Enthält G ein Element der Ordnung 2? Enthält G eine Untergruppe der Ordnung 2?

Aufgabe 8

Bestimme die Anzahl der Isomorphietypen von Magmas, Halbgruppen, Monoiden und Gruppen der Ordnung n , wobei

- (a) $n = 2$,
- (b) $n = 3$ und
- (c*) $n = 4$.

Gib gegebenenfalls obere Schranken für die jeweiligen Zahlen an!