Prof. Dr. Ch. Hering Wintersemester 2007/2008

3. Übungsblatt

Abgabe: **Di, 6.11.07** in der Vorlesung.

Aufgabe 9
Sei K ein endlicher Körper der Ordnung q (q ist dann eine Primzahlpotenz). Wieviele Elemente mit Determinante 1 enthält dann $M_n(K)$, der Ring der $n \times n$-Matrizen über K?

Aufgabe 10
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für $M \subseteq V$ bezeichne $< M >$ die von M erzeugte Untergruppe von $(V, +)$ und $< M >_K$ den von M erzeugten Untervektorraum des K-Vektorraumes V. Sei $0 \neq v \in V$.

(a) *Zeige: Ist $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so ist $< v >=< v >_K$.*

(b) *Zeige: Ist $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so ist für $M \subseteq V$ stets $< M >=< M >_K$.*

(c) *Sei $< v >=< v >_K$. Was kann man dann über K aussagen?*

Aufgabe 11
Sei H eine Halbgruppe und $\mathfrak{P}(H)$ die Menge aller Untermengen von H. Wir definieren eine binäre Verknüpfung $\cdot\ : \mathfrak{P}(H) \times \mathfrak{P}(H) \to \mathfrak{P}(H)$ durch $\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y} = \{xy | x \in \mathfrak{X}, y \in \mathfrak{Y}\}$.

(a) *Zeige: $(\mathfrak{P}(H), \cdot)$ ist eine Halbgruppe.*

(b) *Zeige: Ist H ein Monoid, so ist auch $(\mathfrak{P}(H), \cdot)$ ein Monoid. Bestimme für diesen Fall die Einheitengruppe von $(\mathfrak{P}(H), \cdot)$, d. h. ihre Elemente und ihren Isomorphietyp in Termen von H.*

(c) *Gibt es ein Element $0 \in \mathfrak{P}(H)$, so dass $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ gilt für alle $x \in \mathfrak{P}(H)$?*

(d) *Ist $\mathfrak{P}(H) \backslash \{\emptyset\}$ eine Unterhalbgruppe von $(\mathfrak{P}(H), \cdot)$ bzw. eine Untermonoid von $(\mathfrak{P}(H), \cdot)$, wenn H ein Monoid ist?*

(e) *Sei H eine Gruppe. Enthält $\mathfrak{P}(H) \backslash \{\emptyset\}$ ein Element p, so dass $p \cdot x = x \cdot p = p$ gilt für alle $x \in \mathfrak{P}(H) \backslash \{\emptyset\}$?*

Aufgabe 12

Sei $(M, \cdot)$ ein Magma. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(a) *$(M, \cdot)$ ist eine Loop,*

(b) *eine Multiplikationstafel von $(M, \cdot)$ ist ein Lateinisches Quadrat und*

(c) *jede Multiplikationstafel von $(M, \cdot)$ ist ein Lateinisches Quadrat*

Aufgabe 13

(a) *Seien K ein Körper, V ein Vektorraum über K und $v, w \in V$. Können Sie die Elemente des von v und w erzeugten Unterraumes $< v, w >_K$ beschreiben?*

(b) *Seien G eine Gruppe und a, b Elemente darin. Beschreiben Sie die Elemente der von a und b erzeugten Untergruppe $< a, b >$.*
Sei $o(a) = o(b) = 2$. Gibt es in $< a, b >$ einen zyklischen Normalteiler N von Index 2? Ist N eindeutig?