Übungen zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. Ch. Hering — Wintersemester 2007/2008

---

4. Übungsblatt

Abgabe: **Di, 13.11.07** in der Vorlesung.

Die Aufgaben 14, 15, 16 und 17 sind bis zum 13.11. zu bearbeiten, die Aufgaben 18, 19 und 20 bis zum 20.11., Abgabe jeweils in der Vorlesung.

Aufgabe 14
Zeige:
Für $n, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *gilt* $\left(\frac{n}{(n,k)}, \frac{k}{(n,k)}\right) = 1$.
**) In welchen Ringen gilt diese Aussage?*

Aufgabe 15
Zeige:
Sei $a, b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. *Ist* $a|bc$ *und* $(a, b) = 1$, *so ist* $a|c$.
**) In welchen Ringen gilt diese Aussage?*

Aufgabe 16
Sei V *ein 2-dimensionaler Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen und* G *die Menge aller bijektiven Endomorphismen von* V.

(a) *Ist* G *zusammen mit der Hintereinander-Ausführung als Verknüpfung eine Gruppe?*

(b) *Sei* $\mathfrak{U} \subseteq V$ *eine Menge von Vektoren in* V. *Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von* G*?*

  (I) $G_{[\mathfrak{U}]} := \{g \in G|\ u^g = u$ *für alle* $u \in \mathfrak{U}\}$

  (II) $G_{\mathfrak{U}} := \{g \in G|\ u^g \in \mathfrak{U}$ *für alle* $u \in \mathfrak{U}\}$

  (III) $\{g \in G|\ \mathfrak{U}^g = \mathfrak{U}\}$, *wobei* $\mathfrak{U}^g = \{u^g | u \in \mathfrak{U}\}$

Aufgabe 17
Sei $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *und* $\mathfrak{U}$ *die Menge bestehend aus den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit Mittelpunkt* $(0, 0)$ *und* $(0, 1) \in \mathfrak{U}$. *Bestimme* $G_{\mathfrak{U}}$.

Aufgabe 18
Seien K *ein Körper,* V *ein Vektorraum über* K *und* $A, B \leq_K V$. *Dann gilt* $dim(A + B) = dimA + dimB - dim(A \cap B)$. *Kannst Du diese Tatsache aus 2.17b) herleiten unter der Voraussetzung, dass die Ordnung von* K *und die Dimension von* V *endlich sind?*

Aufgabe 19
Berechne die Ordnungen der Untergruppen $< g >$ *und* $< h >$ *von* S_7 *mit* $g = (123)(46)(57)$ *und* $h = (4567)$ *und bestimme* $< g > \cap < h >$.

Aufgabe 20

Für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V, einen Endomorphismus φ von V und $v \in V$ definiert man $Ann_\varphi(v)$ als das normierte Polynom kleinsten Grades in $\{f \in K[t] |\ f(\varphi)(v) = 0\}$. Zeige, dass für $g(t) \in K[t]$ gilt:

$$Ann_\varphi(g(\varphi)(v)) = \frac{Ann_\varphi(v)}{(Ann_\varphi(v), g(t))}$$

Wie lässt sich diese Formel als Analogon der Formel

$$o(g^k) = \frac{o(g)}{(o(g), k)}$$

für $g \in G$ und $k \in \mathbb{N}$ aus der Vorlesung interpretieren?