# Übungen zur Vorlesung
# Algebra I

Prof. Dr. Ch. Hering | Wintersemester 2007/2008

---

## 10. Übungsblatt

Abgabe: **Di, 08.01.08** in der Vorlesung.

**Aufgabe 38**
*Welche der Gruppen $A_n$ mit $1 \leq n \leq 4$ sind perfekt?*

**Aufgabe 39**
*Zeige, dass die alternierende Gruppe $A_5$ perfekt ist.*

**Aufgabe 40**
*Bestimme für jede Primzahl $p$ eine $p$-Sylowgruppe der Gruppen $GL(2,p), SL(2,p), PGL(2,p)$ und $PSL(2,p)$.*

**Aufgabe 41**
*Sei $G$ eine einfache Gruppe, die eine Untergruppe $U$ vom Index 3 (bzw. 2) enthält. Dann ist $G \cong (\mathbb{Z}/\ 3\mathbb{Z}, +) (bzw. G \cong (\mathbb{Z}/\ 2\mathbb{Z}, +))$.*

**Aufgabe 42**
*Sei $q$ eine Primzahlpotenz. Bestimme die Kommutatorreihe von $GL(2,q)$.*

**Aufgabe 43**
*Ist*

*(a) $\mathbb{Z}$ bzw.*

*(b) der Polynomring $K[x]$, wobei $K$ ein Körper ist,*

*zusammen mit der Multiplikation eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Quasigruppe oder eine Loop?*
*Falls ein Monoid vorliegt, so bestimme dessen Einheitengruppe!*

**Aufgabe 44**
*Seien $G$ und $H$ Gruppen und $\alpha$ ein Homomorphismus von $G$ in $H$. Dann gilt*

$$o(g^\alpha) \mid o(g) \text{ für alle } g \in G.$$

**Aufgabe 45**
*Sei $(\Omega, G)$ ein transitiver Gruppenraum, $p$ eine Primzahl und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$.*
*Sei $|\Omega| = p^b n$, wobei $p \nmid n$ ist. Dann ist $(\Omega, P)$ auf natürliche Weise wieder ein Gruppenraum und es gibt eine Bahn $\Delta \subseteq \Omega$ von $(\Omega, P)$ der Länge $p^b$.*

**Aufgabe 46** *

*Sei $G$ eine Gruppe. Sei $exp(G) = \infty$, wenn $G$ ein Element unendlicher Ordnung enthält. Im komplementären Fall sei*

$$S(G) = \{o(g) | g \in G\}$$

*und*

$$exp(G) = kgV(S(G)).$$

(a) *Ist $G$ endlich und abelsch, so gilt $exp(G) = max(S(G))$.*

(b) *Gilt ensprechendes für beliebige endliche Gruppen?*

(c) *Ist $G$ endlich und abelsch, so erhält $G$ ein Element $g$ so dass $o(g) = exp(G)$.*

(d) *Gibt es entsprechende Phänomene in der Theorie der Normalformen?*