Übungen zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. Ch. Hering | Wintersemester 2007/2008

13. Übungsblatt

Abgabe: **Do, 7.2.08** in der Vorlesung.

Aufgabe 57

Sei $R = M_{n\times n}(K)$, der Ring aller $n \times n$-Matrizen über dem kommutativen Körper K und I ein zweiseitiges Ideal in R. Für $1 \leq s,t \leq n$ sei $E_{st} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ die Matrix mit $a_{st} = 1$ und $a_{ij} = 0$ für $(i,j) \neq (s,t)$.

(a) *Existieren $1 \leq i,j \leq n$ mit $E_{ij} \in I$, so gilt $aE_{st} \in I$ für alle $a \in K$ und alle $1 \leq s,t \leq n$.*

(b) *Existieren $1 \leq i,j \leq n$ mit $E_{ij} \in I$, so ist $I = R$.*

(c) *R besitzt nur die zweiseitigen Ideale $\{0\}$ und R.*

Aufgabe 58

Sei p eine Primzahl. Zeige: Jeder Normalteiler der Ordnung p einer p-Gruppe G liegt im Zentrum von G.

Aufgabe 59

Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ und $a \in \mathbb{Z}$ so dass $1 \leq a \leq n$.

(a) *Ist $(a,n) \neq 1$, so existiert $b \in \mathbb{Z}$, so dass $1 \leq b \leq n$ und $ab \equiv 0 (mod\ n)$.*

(b) *Ist $(a,n) = 1$, so existiert $b \in \mathbb{Z}$, so dass $1 \leq b \leq n$ und $ab \equiv 1 (mod\ n)$.*

(c) *Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $\{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } (a,n) = 1\}$.*

(d) *Berechne direkt die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.*

Aufgabe 60

Seien einerseits A eine abelsche Gruppe und andererseits V ein Vektorraum zusammen mit einem Endomorphismus φ von V. Beschreiben Sie beide Situationen durch geeignete Moduln.

Finden Sie äquivalente Objekte für

(a) *die Ordnung eines Gruppenelements $a \in A$*

(b) *den Exponent von A.*

(c) *eine direkte Zerlegung von A.*

(d) *eine zyklische Untergruppe von A.*

(e) *die Ordnung $|A|$ von A.*

Gibt es ein Äquivalent für den Satz von Lagrange?

Aufgabe 61

Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^2. Ist G abelsch?