Übungen zur Kursvorlesung Algebraische Codierungstheorie

Wintersemester 2009/10 Blatt 1

W.Knapp Tübingen, den 17. Oktober 2009

1. Es seien die Voraussetzungen von (0.1) der Vorlesung gegeben; insbesondere wird die Signalmenge $A = \mathbb{F}_2^n$ mit $1 \leq n \in \mathbb{N}$ zur Übermittlung von Nachrichten der 2-elementigen Menge $N = \{a, b\}$ durch einen binären symmetrischen Kanal ohne Gedächtnis BSK(p) verwendet.
   (a) Wie lässt sich der Fall einer geraden Zahl $n \geq 2$ behandeln? Welchen Vorteil hat man dann gegenüber der Wahl von $n-1$ anstelle von n? Welchen Nachteil hat man dann gegenüber der Wahl von $n+1$ anstelle von n?
   (b) Lässt sich im Fall $p = \frac{1}{2}$ durch Codierung und Decodierung Fehlerkorrektur oder Fehlererkennung bewerkstelligen? Wie steht es hingegen im (hypothetischen) Fall $p > \frac{1}{2}$?
   (c) Gibt es ein mindestens ebenso zuverlässiges, aber weniger aufwendiges Verfahren als das in (0.1) der Vorlesung dargestellte zur möglichst zuverlässigen Nachrichtenübertragung bei gleichen Gegebenheiten?
   (d) Wie lässt sich das Verfahren von (0.1) der Vorlesung auf größere Nachrichtenmengen N übertragen? Wie ist eine solche Übertragung zu beurteilen? *Hinweis*: Betrachten Sie z.B. den Fall $|N| = 4$.

Sind X, Y Mengen und gilt $I \subseteq X \times Y$, so heißt das Tripel $\mathfrak{I} = (X, Y, I)$ eine *Inzidenzstruktur*; I nennt man dann die *Inzidenzrelation* von $\mathfrak{I}$, die Elemente von X nennt man auch *Punkte* von $\mathfrak{I}$ und die von Y *Blöcke* von $\mathfrak{I}$.

2. Sei $\mathfrak{I} = (X, Y, I)$ eine *endliche* Inzidenzstruktur, d.h. $|X| = v$ und $|Y| = b$ mit $v, b \in \mathbb{N}$.
   Für $x \in X$ setze $I(x) := \{y \mid (x, y) \in I\}$; für $y \in Y$ setze $I'(y) := \{x \mid (x, y) \in I\}$.
   Beweisen Sie:
   (a) Es gilt der *Satz über die doppelte Abzählung*:
   $$\sum_{x \in X} |I(x)| = |I| = \sum_{y \in Y} |I'(y)|.$$
   (b) Falls für alle $x \in X$ die Beziehung $|I(x)| = r$ und für alle $y \in Y$ die Beziehung $|I'(y)| = k$ mit geeigneten $r, k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt $vr = bk$.
   (Sofern $I \neq \emptyset$ ist, wird dann $\mathfrak{I}$ als eine *taktische Konfiguration* bezeichnet.)

(5 Punkte)

Im folgenden seien $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_q$. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $u_k V$ die Menge aller k-dimensionalen Unterräume von V.

3. Beweisen Sie, dass V genau $\frac{q^n-1}{q-1}$ verschiedene 1-dimensionale Unterräume besitzt.

(5 Punkte)

4. Gelte $0 \leq k \leq t \leq n$ für $k, t \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Inzidenzstruktur $\mathrm{PG}_{k,t}(V) := (u_k V, u_t V, I)$ eine taktische Konfiguration ist und berechnen Sie die Parameter v, b, r, k im Sinne von Aufgabe 2.
Dabei sei $I := \{(U, W) \mid U \in u_k V,\ W \in u_t V \text{ und } U \leq W\}$ die „natürliche" Inzidenzrelation. (10 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion, Sätze der Linearen Algebra und Aufgabe 2. Aufgabe 3 lässt sich als ein Spezialfall von Aufgabe 4 auffassen.

Die Übungsaufgabe 1 soll für die erste Übungsstunde vorbereitet werden.

Die Übungsaufgaben 2,3 und 4 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 28.10.2009, in der Vorlesungspause abzugeben.