Übungen zur Kursvorlesung Algebraische Codierungstheorie

Wintersemester 2009/10 Blatt 10

W.Knapp Tübingen, den 28. Dezember 2009

37. Für eine endliche abelsche Gruppe A bezeichne $\widehat{A} = \mathrm{Hom}\,(A, \mathbb{C}^\bullet)$ die zu A duale abelsche Gruppe.
    (a) Ist $A = \langle t \rangle \cong Z_n$, so setze $\tau : A \to \mathbb{C}^\bullet : t^k \mapsto \exp\,(k \cdot \frac{2\pi i}{n})$. Beweisen Sie, dass dann $\widehat{A} = \langle \tau \rangle \cong Z_n \cong A$ gilt.
    (b) Leiten Sie aus (a) und dem Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen ab, dass stets $\widehat{A}$ zu A isomorph ist.

38. Beweisen Sie: Für jeden linearen $(n, n-k)$-Code $C = (V, B, C)$ über $\mathbb{F}_q$ mit Minimalgewicht $\mu(C) \geq 3$ lässt sich ein Hamming-Paar (V_1, B_1) der Dimension $n_1 = (q^k - 1)/(q - 1)$ konstruieren derart, dass $V \leq V_1$, B ein Teil von B_1 ist und die Beziehung $C = H_k \cap V$ für einen geeigneten $(n_1, n_1 - k)$-Hamming-Code $H_k = (V_1, B_1, H_k)$ erfüllt ist.
    Was bedeutet diese Beziehung für die Koordinaten-n_1-tupel der Codevektoren?
    (7 Punkte)

39. Beweisen Sie, dass ein $(7, 4)$-Hamming-Code H_3 den Gewichtszeiger $\eta^7 + 7\xi^3\eta^4 + 7\xi^4\eta^3 + \xi^7$ hat und dass die Automorphismengruppe $\mathrm{ML}(H_3) \cong \mathrm{GL}(3, 2)$ jeweils transitiv auf den 4 verschiedenen Gewichtsklassen von H_3 wirkt. Was lässt sich über den Simplex-Code $S_3 = {H_3}^\perp$ sagen? (8 Punkte)

40. Sei C ein linearer $(9, 2)$-Code über $\mathbb{F}_2$ mit Minimalgewicht 6. Geben Sie ein Beispiel an und berechnen Sie die Gewichtszeiger von C und von $C^\perp$. (5 Punkte)

Die Übungsaufgaben 38, 39 und 40 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 20. Januar 2010, in der Vorlesungspause abzugeben.