W.Knapp Tübingen, den 28. Dezember 2009

Im folgenden sei $\mathcal{G}_{24}$ der lineare $(24,12)$-Code über $\mathbb{F}_2$ mit Bezugsbasis $B = (e_i)_{i\in 24}$ und der Generatormatrix

$$g_1 := \begin{bmatrix}
1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot\\
1&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1\\
1&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}.$$

(In der Matrix ist der Übersichtlichkeit halber $\cdot$ anstelle von 0 eingetragen.)

41. Beweisen Sie:
    (a) $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}{}^{\perp}$ und die Hamming-Gewichte aller Vektoren von $\mathcal{G}_{24}$ sind durch 4 teilbar.
    (b) Die Mengen $\{1,\dots,11\}$ und $\{0,\dots,10\}$ enthalten keinen Träger $T_B(x)$ eines von 0 verschiedenen Codeworts von $\mathcal{G}_{24}$. Hingegen gibt es jeweils (genau) ein von 0 verschiedenes Codewort x von $\mathcal{G}_{24}$ mit der Eigenschaft $T_B(x) \subseteq \{0,\dots,11\}$ bzw. $T_B(x) \subseteq \{12,\dots,23\}$.
    (c) Das Minimalgewicht von $\mathcal{G}_{24}$ ist 8. (10 Punkte)

    Bezeichnung: Jeder zu $\mathcal{G}_{24}$ isomorphe lineare Code heißt ein *binärer Golay-Code der Länge* 24.

42. Setze $\Omega_0 := \{1,\dots,23\}$; bezeichne $\mathcal{G}_{23} := \partial_{\Omega_0}\mathcal{G}_{24}$ die Verkürzung von $\mathcal{G}_{24}$ durch Streichen der 0-Koordinate. Es sei $B_0 = (e_i)_{i\in\Omega_0}$ die Bezugsbasis von $\mathcal{G}_{23}$. Beweisen Sie:
    (a) $\mathcal{G}_{23}$ ist ein linearer $(23,12)$-Code über $\mathbb{F}_2$. Wie erhält man aus g_1 eine Generatormatrix von $\mathcal{G}_{23}$? Wie lässt sich $\mathcal{G}_{24}$ aus $\mathcal{G}_{23}$ rekonstruieren?
    (b) Das Minimalgewicht von $\mathcal{G}_{23}$ ist 7 und $\mathcal{G}_{23}$ ist 3-perfekt.
    (c) $\mathcal{G}_{23}{}^{\perp_0} = \{x \mid x \in \mathcal{G}_{23} \text{ und } w_{B_0}(x) \text{ ist gerade }\}$ ist ein linearer $(23,11)$-Code über $\mathbb{F}_2$ mit Minimalgewicht 8. Warum lässt sich $\mathcal{G}_{23}{}^{\perp_0}$ als Teilcode von $\mathcal{G}_{24}$ auffassen?

(d) Ändern sich die Resultate wesentlich, wenn man Ω_0 durch eine beliebige 23-Teilmenge von 24 ersetzt? (5 Punkte)

Bezeichnung: Jeder zu $\mathcal{G}_{23}$ isomorphe lineare Code heißt ein *binärer Golay-Code der Länge* 23.

43. Berechnen Sie die Gewichtszeiger von $\mathcal{G}_{23}$ und seinem Dualcode ${\mathcal{G}_{23}}^{\perp} = {\mathcal{G}_{23}}^{\perp_0}$. (5 Punkte)

44. Zeigen Sie, dass die folgend abgedruckte Matrix g_2 eine (nicht freie) Generatormatrix von $\mathcal{G}_{24}$ ist. Zeigen Sie, dass sich aus dieser Tatsache eine zyklische Untergruppe der Ordnung 22 von $\mathrm{PML}(\mathcal{G}_{24}) \cong \mathrm{ML}(\mathcal{G}_{24}) =: M_{24}$ ergibt.

$$g_2 := \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot\\
1&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1\\
1&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1\\
1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot\\
\cdot&1&\cdot&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array}\right]$$

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 27. Januar 2010, in der Vorlesungspause abzugeben.