

W.Knapp

Tübingen, den 28. Dezember 2009

45. Es bezeichne $\mathcal{G}_{24}$ den binären Golay-Code der Länge 24 von Übungsaufgabe 41 mit ambientem Hamming-Paar (V, B) , $V = \mathbb{F}_2^{24}$ und $B = (e_i)_{i \in 24}$ die kanonische Basis. Für $x = (x_i)_{i \in 24} \in V$ bezeichne $T_B(x) = \{i \mid i \in 24 \text{ und } x_i \neq 0\}$ den Träger von x .

Die Elemente von $W_8(\mathcal{G}_{24})$ bezeichnen wir als die *Oktaden* von $\mathcal{G}_{24}$, die Elemente von $W_{12}(\mathcal{G}_{24})$ hingegen als die *Dodekaden* von $\mathcal{G}_{24}$.

Weiter sei $u_0 \in W_{12}(\mathcal{G}_{24})$ eine beliebige Dodekade; setze $u_1 := u_0 + \sum_{i \in 24} e_i$, cf. die Generatormatrix g_2 in Übungsaufgabe 44.

$W_8(\mathcal{G}_{24})$ bezeichne die Menge der 759 Oktaden von $\mathcal{G}_{24}$. Beweisen Sie:

- (a) Für jede 5-Teilmenge X von 24 gibt es genau eine Oktade x , deren Träger $T_B(x)$ die Menge X enthält.
- (b) Es gibt genau 132 Oktaden, deren Träger mit dem Träger von u_0 einen 2-elementigen Durchschnitt besitzt. Dabei kommen alle 2-Teilmengen des Trägers von u_0 als Durchschnitte vor; für jede 2-Teilmenge des Trägers von u_0 gibt es dabei genau 2 derartige Oktaden.
- (c) Es gibt genau 495 Oktaden, deren Träger mit dem Träger von u_0 einen 4-elementigen Durchschnitt besitzt; dabei kommen alle 4-Teilmengen des Trägers von u_0 als Durchschnitte vor; für jede 4-Teilmenge des Trägers von u_0 gibt es dabei genau eine derartige Oktade.
- (d) Entsprechende Aussagen gelten für u_1 anstelle von u_0 . (10 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie, dass der Gewichtszeiger von $\mathcal{G}_{24}$ aus der Vorlesung bekannt ist und dass $\mathcal{G}_{24}^\perp = \mathcal{G}_{24}$ gilt.

46. Beweisen Sie: Ist K ein kommutativer Körper und $a \in K$, so ist $K[X]/(X^n - a)$ zur Gruppenalgebra KZ_n genau dann isomorph, wenn $a = 1$ ist.
(Zur Abkürzung bezeichne hier und i.f. (f) das von f erzeugte Hauptideal.)

47. Sei $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und $G = \prod_{i \in m} Z_{n_i}$ mit $1 < n_i \in \mathbb{N}, i \in m$. Zeigen Sie, dass $A := K \tau_a G := K[X_0, \dots, X_{m-1}] / \sum_{i \in m} (X_i^{n_i} - a_i)$ mit $a = (a_i) \in (K^\bullet)^m$ eine kommutative G -monomiale K -Algebra ist. Wann ist A zur Gruppenalgebra KG isomorph? (5 Punkte)

48. Zeigen Sie, dass $\text{GL}(2, 3)$ keine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 enthält, welche transitiv auf der Menge der 1-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{F}_3^2$ wirkt. (5 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 3. Februar 2010, in der Vorlesungspause abzugeben.