Übungen zur Kursvorlesung Algebraische Codierungstheorie

Wintersemester 2009/10 — Blatt 2

W.Knapp — Tübingen, den 17. Oktober 2009

5. $C_{\text{rep}} := \{w(\alpha) = (\alpha)_{i \in n} \mid \alpha \in A\}$ bezeichne den Wiederholungscode der Länge n über A.
   (a) Zeigen Sie, dass C_{rep} äquidistant ist und die Plotkin-Schranke trifft. Für welche Werte von n, e und q ist C_{rep} e-perfekt?
   (b) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\text{Haut}(C_{\text{rep}})$ des Codes C_{rep} und alle zu C_{rep} (Hamming-)äquivalenten Codes. (5 Punkte)

6. (a) Beweisen Sie:
   Die zu $(\text{Sym}\, A)^n$ isomorphe Untergruppe von $H(n, A) = \text{Sym}\, A \wr \text{Sym}\, n$

$$B := \{g(1, \tau) \mid \tau = (\tau_i)_{i \in n} \in (\text{Sym}\, A)^n\},$$

   die sogenannte *Basisgruppe* des Kranzprodukts, ist ein Normalteiler und ist bei der in (1.25) der Vorlesung dargestellten Wirkung *transitiv* auf A^n.
   Dabei gilt : B wirkt *regulär* auf A^n genau dann, wenn $|A| = 2$ ist.
   (b) Bestimmen Sie den Punktstabilisator $H(n, A)_x$ für ein beliebiges $x \in A^n$.

7. Beweisen Sie : Je zwei $(8, 2)$-Codes über $\mathbb{F}_2$ mit Minimalabstand 5 sind äquivalent. $C := \{00000000, 11111000, 00011111, 11100111\}$ ist ein $(8, 2)$-Code über $\mathbb{F}_2$ mit Minimalabstand $\mu(C) = 5$. Bestimmen Sie die Ordnung von $\text{Haut}(C)$ und die Anzahl aller zu C (Hamming-)äquivalenten Codes. (10 Punkte)

8. Der schlichte (ungerichtete) Graph

$$\mathcal{H}(n, A) := (A^n, \{\{x, y\} \mid x, y \in A^n \text{ und } d_H(x, y) = 1\})$$

   mit Eckenmenge A^n und Kantenmenge $\mathcal{K} = \{\{x, y\} \mid x, y \in A^n \text{ und } d_H(x, y) = 1\}$ wird als der *Hamming-Graph* der Länge n über A bezeichnet.
   (a) Aus welchem Grund kann man den Hamming-Raum (A^n, d_H) und den Hamming-Graphen $\mathcal{H}(n, A)$ als gleichwertige Begriffsbildungen auffassen?
   (b) Beweisen Sie: $H(n, A) = \{g \mid g \in \text{Sym}\, A^n$ und g lässt die Kantenmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{H}(n, A)$ invariant $\}$.
   (c) Welche geometrische Gestalt kann man den Graphen $\mathcal{H}(2, \mathbb{F}_2)$ und $\mathcal{H}(3, \mathbb{F}_2)$ geben? Warum wird $\mathcal{H}(n, \mathbb{F}_2)$ als der n-dimensionale Hyperwürfel bezeichnet? (5 Punkte)

9. (GAP und GUAVA) Befassen Sie sich mit den GUAVA-Funktionen `RandomCode`, `MinimumDistance`, `GreedyCode` und `LexiCode`. Welche Vorlesungsthemen werden dabei angesprochen? Führen Sie Experimente durch und versuchen Sie, deren Ergebnisse mit den Resultaten der Vorlesung zu beurteilen.

Die Übungsaufgaben 5,7 und 8 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 4. November 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.