Übungen zur Kursvorlesung Algebraische Codierungstheorie

Wintersemester 2009/10 Blatt 3

W.Knapp Tübingen, den 1. November 2009

Im folgenden sei A ein Alphabet mit $q \geq 2$ Elementen und $\theta := \frac{q-1}{q}$. Die q-näre *Entropiefunktion* ist nach (2.1) der Vorlesung definiert via

$H_q : \,]0,1[\, \to \mathbb{R} : \, x \mapsto H_q(x) := -(1-x)\,{}^q\!\log(1-x) - x\,{}^q\!\log\frac{x}{q-1}$.

10. Führen Sie eine Kurvendiskussion der Entropiefunktion H_q durch. Beweisen Sie insbesondere, dass sich die Entropiefunktion H_q stetig auf das abgeschlossenene Intervall $[0,1]$ fortsetzen lässt und bestimmen Sie die Extremalstellen und den Bildbereich $\operatorname{Im} H_q$ der stetigen Fortsetzung.

11. Sei (t_n) eine Folge im reellen Intervall $]0,1[$ mit der Eigenschaft $t_n \leq \theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $0 < \lim_{n\to\infty} t_n =: t$ existiert. Beweisen Sie:
    (a) Wenn $0 \leq k_n \leq t_n n - 1$ gilt, so ist
    $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,{}^q\!\log(\sum_{k_n \leq m < t_n n} \binom{n}{m}(q-1)^m) = H_q(t)$.
    (b) Ist $c \in \mathbb{N}$ und $n - c \geq t_n n$, so gilt
    $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,{}^q\!\log(\sum_{0 \leq m < t_n n} \binom{n-c}{m}(q-1)^m) = H_q(t)$.

    (10 Punkte)

12. Was lässt sich in (2.7) der Vorlesung sagen, falls für den Code $C \subseteq A^n$ mit $n' = \lfloor \frac{d-1}{\theta} \rfloor$ die Gleichung $|C| = \frac{d}{d-\theta n'} q^{n-n'}$ gilt?
    Geben Sie hierfür ein nicht-triviales Beispiel an. (5 Punkte)

13. Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und $0 \neq a \in L$. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Minimalpolynomen p_a und $p_{a^{-1}}$ von a bzw. a^{-1} über K? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den Fall $L|K = \mathbb{F}_{2^k}|\mathbb{F}_2$? Behandeln Sie das Beispiel $\mathbb{F}_8|\mathbb{F}_2$ vollständig und explizit.

    (5 Punkte)

Die Übungsaufgaben 11,12 und 13 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 11. November 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.