

W.Knapp

Tübingen, den 24. November 2009

24. Sei $g = (g_{ij})_{(i,j) \in k \times n}$ eine freie Generatormatrix des linearen (n, k) -Codes C über $\mathbb{F}_q$. Beweisen Sie:
 $g' \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ ist eine Generatormatrix von C genau dann, wenn ein $a \in \text{GL}(k, q)$ existiert mit $g' = ag$.

Übertragen Sie dies Resultat auch auf Kontrollmatrizen von C . (5 Punkte)

25. Sei $h \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ mit $\text{rg}(h) = k$.

Zeigen Sie, dass für alle $a \in \text{GL}(k, q)$ die Beziehung $\text{tsrg}(ah) = \text{tsrg}(h)$ gilt. Lässt sich eine entsprechende Aussage auch für $\text{tsrg}(hb)$ mit beliebigem $b \in \text{GL}(n, q)$ beweisen? (5 Punkte)

Zusatzfrage: Ist die Voraussetzung $\text{rg}(h) = k$ erforderlich?

26.

- (a) Sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein (nicht notwendig linearer) binärer Code der Länge $n \geq 2$ über $\mathbb{F}_2$ mit $|C| \geq 3$ und Minimalabstand $\mu(C) = d$.

Beweisen Sie, dass dann stets $d \leq \frac{2}{3}n$ gilt.

- (b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ stets ein linearer $(n, 2)$ -Code C_4 existiert mit der Eigenschaft $\mu(C_4) = \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$.

Geben Sie eine Generatormatrix und eine Kontrollmatrix von C_4 an.

- (c) In welchen Fällen trifft C_4 die Plotkin-Schranke?

- (d) Was lässt sich über die Automorphismengruppe $\text{ML}(C_4)$ von C_4 sagen, falls $n \equiv 0 \pmod{3}$ gilt? (10 Punkte)

Hinweis: C_4 nennt man einen *Cordaro-Wagner-Code*. Es gibt eine GUAVA-Funktion, welche Cordaro-Wagner-Codes liefert. Bei (b) ist es vielleicht sinnvoll, zuerst den Fall $n \equiv 0 \pmod{3}$ zu betrachten.

27.

- (a) Berechnen Sie unter geeigneten Annahmen die Wahrscheinlichkeit, dass Fehler vom Gewicht 2 bei der Verwendung des ISBN-Codes nicht erkannt werden.

- (b) Übertragen Sie das ISBN-Codierungsverfahren auf das Alphabet $\{a, \dots, z, -, 0, \dots, 9\}$ aus 37 Zeichen und Zeichenfolgen der Länge 36. Kann man damit die gleichen Fehlertypen erkennen?

Die Übungsaufgaben 24, 25 und 26 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 9. Dezember 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.