

W.Knapp

Tübingen, den 28. November 2009

28. Sei  $C = (V, B, C)$  ein linearer  $(n, k)$ -Code über  $\mathbb{F}_q$  mit  $k \geq 1$  mit  $B = (e_i)_{i \in n}$ .  $d = \mu(C)$  bezeichne das Minimalgewicht von  $C$ , die entsprechende Gewichtsklasse von Codevektoren sei  $W_d(C) = \{x \mid x \in C \text{ und } w_B(x) = d\}$ .  
Für  $x = \sum_{i \in n} x_i e_i \in V$  bezeichne  $T_B(x) = \text{supp}_B(x) = \{i \mid i \in n \text{ und } x_i \neq 0\}$  den Träger von  $x$ . Beweisen Sie:
- (a) Für je zwei  $x, y \in W_d(C)$  mit  $T_B(x) = T_B(y)$  gilt  $x = ry$  mit  $0 \neq r \in \mathbb{F}_q$ .
  - (b)  $a_d(C) = |W_d(C)| \leq (q-1) \binom{n}{d}$ .
  - (c) Was lässt sich über das Parameterquadrupel  $(n, k, d, q)$  bz w. den linearen Code  $C$  beweisen, falls  $a_d(C) = (q-1) \binom{n}{d}$  gilt? (6 Punkte)

29. Es sei  $C = (V, B, C)$  ein linearer  $(4, 2)$ -Code über  $\mathbb{F}_3$  mit  $B = (e_i)_{i \in 4}$  und mit der Generatormatrix

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie den Gewichtszeiger von  $C$ .
- (b) Warum gilt  $C = C^\perp$ ? Geben Sie zwei verschiedene Kontrollmatrizen von  $C$  an.
- (c) Bestimmen Sie alle Informationsmengen und alle Paritätskontrollmengen von  $C$ .
- (d) Sei  $x \in C$  ein Codewort vom Minimalgewicht  $d = \mu(C)$  und  $\Omega = T_B(x) = \text{supp}_B(x)$ ;  $\partial = \partial_\Omega$  bezeichne die Verkürzungsabbildung  $(x_i)_{i \in 4} \mapsto (x_i)_{i \in \Omega}$ . Beweisen Sie, dass stets  $\dim \partial C = 2$  gilt; die Verkürzungsabbildung ist somit stets injektiv. Überprüfen Sie die Behauptung von Satz (4.22) der Vorlesung an mehreren konkreten Beispielen.
- (e) Ist  $C$  ein perfekter Code? Trifft  $C$  die Plotkin-Schranke? (10 Punkte)

30. Sei  $C = (V, B, C)$  ein linearer  $(n, k)$ -Code über  $\mathbb{F}_q$ ,  $B = (e_i)_{i \in n}$ .  
Wieviele verschiedene Generatormatrizen vom Rang  $k$  und wieviele verschiedene Kontrollmatrizen vom Rang  $n - k$  besitzt  $C$ ? (4 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 16. Dezember 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.