Übungen zur Kursvorlesung Algebraische Codierungstheorie

Wintersemester 2009/10 — Blatt 9

W.Knapp — Tübingen, den 8. Dezember 2009

31. Sei $C = (V, B, C)$ ein linearer (n, k)-Code über $\mathbb{F}_q$, $B = (e_i)_{i\in n}$.
$n' = n'(C) := |\{i \mid i \in n \text{ und } \exists\, x \in C \text{ mit } i \in T_B(x)\}|$ heiße die *echte Länge* von C. Wir nennen C *verschwenderisch*, falls $n' < n$ gilt.
Beweisen Sie: $\sum_{x\in C} w_B(x) = n'(q-1)q^{k-1}$. (4 Punkte)

32. Sei $C = (V, B, C)$ ein nicht verschwenderischer linearer (n, k)-Code über $\mathbb{F}_q$, welcher r-äquidistant ist mit $1 \le r \in \mathbb{N}$, d.h. der Gewichtszeiger von C sei $a(C) = \eta^n + (q^k - 1)\xi^r\eta^{n-r}$. Beweisen Sie:
Dann gilt $r = nq^{k-1}/(1 + q + \ldots + q^{k-1})$; insbesondere ist $1 + q + \ldots + q^{k-1}$ ein Teiler von n und q^{k-1} ein Teiler von r.
Geben Sie Beispiele mit $r = q^{k-1}$ an. Kann man nicht verschwenderische r-äquidistante lineare (n, k)-Codes mit $r > q^{k-1}$ konstruieren? (4 Punkte)

33. Es sei C ein linearer $(8, 4)$-Code über $\mathbb{F}_2$ mit der Generatormatrix

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie den Gewichtszeiger und den Nebenklassengewichtszeiger von C. Warum gilt $C = C^\perp$?
   (b) Geben Sie eine Standardtafel von C an.
   (c) Der Code C ist 1-korrigierend. Warum können mithilfe von C alle Fehler vom Gewicht ≤ 2 erkannt werden?
   (d) Zeigen Sie: Wenn eine Nebenklasse $x+C$ einen Vektor vom Gewicht 2 enthält, so enthält sie genau 4 Vektoren vom Gewicht 2. In welcher kombinatorischen Beziehung stehen diese 4 Vektoren zu den Elementen des Codes C?

   (10 Punkte)

34. Welche Beziehung besteht zwischen dem Code C von Aufgabe 33 und einem $(7, 4)$-Hamming-Code über $\mathbb{F}_2$? (2 Punkte)
Hinweis: Klassische Paritätskontrolle

35. Konstruieren Sie eine 5×31-Hamming-Matrix über $\mathbb{F}_2$ und eine 3×31-Hamming-Matrix über $\mathbb{F}_5$.

36. Nach Vorlesung gibt es 30 verschiedene $(7, 4)$-Hamming-Codes. Geben Sie diese explizit durch ihre erzeugenden Matrizen an.

Die Übungsaufgaben 31, 32, 33 und 34 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 13. Januar 2010, in der Vorlesungspause abzugeben.