Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 — Blatt 0

W.Knapp — Tübingen, den 17. April 2009

Im folgenden bezeichne K stets einen Körper und für die ersten beiden Aufgaben sei $L := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$.

1. Beweisen Sie:

(a) L ist eine K-Unteralgebra mit Einselement von $K^{2\times 2}$. Dabei ist K durch den Monomorphismus $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ in L eingebettet; L kann man deshalb als Erweiterungsring von K verstehen.

(b) Zeigen Sie, dass $b = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ eine geordnete K-Basis von L ist. Bestimmen Sie die Hypermatrix der Strukturkonstanten von L bezüglich b.

(c) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:
   - (i) L ist ein Körper.
   - (ii) Das Polynom $T^2 + T + 1$ ist irreduzibel in $K[T]$.
   - (iii) Das homogene Polynom $T_1^2 - T_1T_2 + T_2^2 \in K[T_1, T_2]$ besitzt in K^2 nur die einzige („triviale") Nullstelle $(0, 0)$.

(d) Sei $K \leq \mathbb{R}$. Dann ist L ein Körper. $T^2 + 1$ ist reduzibel in $L[T]$ genau dann, wenn $\sqrt{3} \in K$ gilt.

(e) Wenn $K = \mathbb{R}$ ist, so gilt $L \cong \mathbb{C}$.

(f) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $T^2 + 3$ in L im Fall $\operatorname{char}(K) = 0$.

2. Wir betrachten den Fall eines endlichen Körpers K mit $\operatorname{char}(K) = p > 0$ und genau $q = p^f$ Elementen.

(a) Zeigen Sie: L ist genau dann ein Körper, wenn f ungerade ist und $p \equiv 2 \pmod 3$ gilt.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für einen Körper $\mathbb{F}_{25}$ mit genau 25 Elementen an. Bestimmen Sie in der multiplikativen Gruppe dieses Körpers ein Element der Ordnung 24. Warum gibt es genau 8 derartige Elemente?

3. Sei L ein Erweiterungskörper von K und $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ eine endliche Familie von Elementen von L. Beweisen Sie, dass $K(x_1, \ldots, x_n) = \{f(x)g(x)^{-1} \mid f, g \in K[X_1, \ldots, X_n] \text{ and } g(x) \neq 0\}$ gilt.

Die Übungsaufgaben sind nicht schriftlich zu bearbeiten, sondern für die erste Übungsstunde vorzubereiten.