Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 Blatt 1

W.Knapp Tübingen, den 3. April 2009

4. Sei $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\}$. Beweisen Sie:
   (a) $\mathbb{H}$ ist ein nichtkommutativer Teilring mit Einselement des Matrixrings $\mathbb{C}^{2\times 2}$.
   (b) $\mathbb{H}$ ist keine $\mathbb{C}$-Unteralgebra, aber eine 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra mit der geordneten $\mathbb{R}$-Basis (E, I, J, K), wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ gesetzt wird.
   (Wir schreiben auch 1 statt E und identifizieren $r \in \mathbb{R}$ mit $rE = r \cdot 1$.)
   Bestimmen Sie die Hypermatrix der Strukturkonstanten von $\mathbb{H}$ bezüglich dieser Basis.
   (c) Die Abbildung $\tau : x = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \mapsto x^* := \overline{x}^t = \begin{pmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{pmatrix}$ von $\mathbb{H}$ in $\mathbb{H}$ ist ein involutorischer Antiautomorphismus der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{H}$. Dabei gilt $\operatorname{spur}(x) = x + x^*$ und $\det(x) = xx^* = x^*x$ für alle $x \in \mathbb{H}$.
   (d) Für alle $x \in \mathbb{H}$ sind $\operatorname{spur}(x)$ und $\det(x)$ reell. Dabei ist $\det(x) \geq 0$ und $\det(x) = 0 \iff x = 0$. Folglich ist $\mathbb{H}$ ein nichtkommutativer Körper, der Schiefkörper der *Hamiltonschen Quaternionen*, siehe (1.6) der Vorlesung.

(10 Punkte)

5. Konstruieren Sie in den folgenden Fällen einen kleinsten Erweiterungskörper L des Körpers K, über dem das gegebene Polynom f ganz in Linearfaktoren zerfällt (Zerfällungskörper von f über K). Geben Sie bei den endlichen Köpern eine Primitivwurzel von L konkret an (also ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe), ansonsten ein primitives Element von $L|K$, sofern die Körpererweiterung einfach algebraisch ist.
   (a) $K = \mathbb{F}_2, f = T^8 + T$;
   (b) $K = \mathbb{F}_3, f = T^8 - 1$;
   (c) $K = \mathbb{F}_3, f = T^2 + T - 1$;
   (d) $K = \mathbb{F}_{31}, f = T^{30} - 1$;
   (e) $K = \mathbb{Q}, f = T^3 - 1$;
   (f) $K = \mathbb{R}, f = T^4 + T^3 + T^2 - T - 2$.

(10 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 29. April 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.