Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 — Blatt 2

W.Knapp — Tübingen, den 25. April 2009

6. Beweisen Sie:
   (i) Jeder Primkörper K besitzt nur den trivialen Automorphismus id_K.
   (ii) $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{R}|\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}_\mathbb{R}\}$. (6 Punkte)
   Hinweis: Zeigen Sie bei (ii), dass jeder Automorphismus von $\mathbb{R}$ die Ordnungsrelation $<$ in $\mathbb{R}$ invariant lässt und dass der Primkörper $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Beachten Sie dabei, dass in $\mathbb{R}$ die positiven Zahlen genau die von 0 verschiedenen Quadrate sind.

Erinnerung: Ist G eine multiplikativ geschriebene Gruppe und sind $x, y \in G$, so bezeichnet $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ den Kommutator von x und y. $G' := \langle [x, y] \mid x, y \in G\rangle$ heißt die *Kommutatorgruppe* von G; G' ist der kleinste Normalteiler von G mit abelscher Faktorgruppe. Z_n bezeichne die zyklische Gruppe der Ordnung n für natürliche Zahlen $n \geq 1$. K^+ bezeichne die additive Gruppe von K, $K^\bullet$ bezeichne die multiplikative Gruppe von K.

7. Für $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ bezeichne $\varphi(a, b) := (x \mapsto ax + b)$ die zugehörige „affine“ Abbildung von K auf sich. Setze $A(K) = \mathrm{AGL}(1, K) := \{\varphi(a, b) \mid a, b \in K, a \neq 0\}$ und $T(K) := \{\varphi(1, b) \mid b \in K\}$ und $H(K) := \{\varphi(a, 0) \mid a \in K^\bullet\}$. Beweisen Sie:

(a) $A(K)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}\,(K)$; $K^+ \cong T(K) \trianglelefteq A(K)$ und $A(K)/T(K) \cong H(K) \cong K^\bullet$.

(b) $A(K) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in K, a \neq 0 \right\} \leq \mathrm{GL}(2, K)$.

(c) Wenn $|K| = 2$ ist, gilt $A(K) = T(K) \cong Z_2$. Wenn $|K| > 2$ ist, so gilt $A(K)' = T(K)$ und jedes Element von $T(K)$ ist ein Kommutator.

(d) $A(K)$ ist stets auflösbar. (N.B. $A(K)$ heißt die *affine Gruppe* von K.)

8. Es sei $\varphi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ die Eulersche Phi-Funktion (der Anzahl der teilerfremden Reste). Zeigen Sie:
   Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. (6 Punkte)
   Hinweis: Jede zyklische Gruppe der Ordnung n besitzt für jeden Teiler d von n genau eine Untergruppe der Ordnung d.

9. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie:
   G ist genau dann zyklisch, wenn für jeden Teiler d von n die Abschätzung $|\{x \mid x \in G \text{ und } x^d = 1\}| \leq d$ gilt.
   Warum ergibt sich hieraus ein zweiter Beweis für den bekannten Satz, dass jede endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch ist?
   (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben 6, 8 und 9 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 6. Mai 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.