13. Untersuchen Sie die folgenden Polynomw $f_k \in \mathbb{Q}[T]$ auf Irreduzibiltät:
$$f_1 = T^3 - 2T + 6\ ;\ f_2 = 4T^4 + 3T^3 + 2T^2 + T + 1\ ;\ f_3 = T^5 - 7T + 13.$$
(6 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse von §4 der Vorlesung. Beachten Sie dabei, dass (4.3) und (4.9) simultan für verschiedene Primzahlreduktionen verwendet werden können und auch für mögliche Teiler von f_k gelten.

14. Sei A eine additiv geschriebene abelsche Gruppe; f und g seien Abbildungen von $\mathbb{N}_1$ in A derart, dass $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_1$ gilt.
Beweisen Sie, dass dann für jedes $n \in \mathbb{N}_1$ die Beziehung $g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)$ gilt.
Wie lautet das Resultat für multiplikativ geschriebene Gruppen?
(4 Punkte)

15. Beweisen Sie, dass im Polynomring $R[T]$ über jedem Integritätsbereich R für natürliche Zahlen $m, n \geq 1$ gilt:
$T^m - 1$ teilt $T^n - 1$ genau dann, wenn m ein Teiler von n ist.
Lässt sich dieser Sachverhalt übertragen, wenn man $R[T]$ durch $\mathbb{Z}$ und T durch eine natürliche Zahl $a \geq 2$ ersetzt?

16. Sei p eine Primzahl. Für jedes $m \in \mathbb{N}_1$ sei $\mathrm{Irr}(m)$ die Menge aller normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$ vom Grad m; ferner setze $Q_m := \prod_{f \in \mathrm{Irr}(m)} f$ und $\psi(m) := |\mathrm{Irr}(m)|$. Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_1$ gilt:
(a) $X^{p^n} - X = \prod_{d|n} Q_d$, (b) $Q_n = \prod_{d|n} (X^{p^d} - X)^{\mu(\frac{n}{d})}$ und
(c) $n\psi(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) p^d$.
Berechnen Sie Q_r für eine beliebige Primzahl r. Berechnen Sie $\psi(15)$ im Fall $p = 2$.
(10 Punkte)
Hinweis: Zu (a) kann man (3.13) der Vorlesung verwenden; (b) folgt mit der multiplikativen Fassung von Aufgabe 14 aus (a).

Die Übungsaufgaben 13, 14 und 16 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 20. Mai 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.