Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 — Blatt 5

W.Knapp — Tübingen, den 11. Mai 2009

17. $\alpha := \sqrt[3]{2}$ bezeichne die reelle Nullstelle des nach dem Eisenstein-Kriterium irreduziblen Polynoms $T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$; setze $E := \mathbb{Q}(\alpha)$.
    (i) Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\sigma : E \to \mathbb{C}$ (über $\mathbb{Q}$) und geben Sie jeweils $\mathbb{Q}$-Basen für die Körpererweiterungen $E^\sigma|\mathbb{Q}$ an.
    (ii) Zeigen Sie, dass das Kompositum L aller Bildkörper E^σ den Grad $[L : \mathbb{Q}] = 6$ über $\mathbb{Q}$ besitzt und geben Sie eine geordnete Basis von $L|\mathbb{Q}$ an (Nachweis!). Warum ist $L|\mathbb{Q}$ normal? (8 Punkte)

    Hinweis: Verwenden Sie die primitive dritte Einheitswurzel $\rho = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ zur Konstruktion der Homomorphismen σ mit Hilfe von Satz (5.7) der Vorlesung.

18. Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Köper mit genau q Elementen und sei weiter $\Phi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ eine beliebige Abbildung.
    Beweisen Sie den folgenden „Interpolationssatz“:
    Es existiert ein Polynom $f \in \mathbb{F}_q[X]$ derart, dass $f(x) = \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}_q$ gilt.
    Ist f eindeutig bestimmt? Wie wirkt sich die Forderung $\operatorname{Grad}(f) < q$ aus?
    Wie lässt sich dieser Sachverhalt mithilfe des Homomorphiesatzes für Ringe sehr schön formulieren?

19. Sei p eine Primzahl.
    (i) Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Wie lässt sich in einem Körper $\mathbb{F}_{p^n}$ die Inverse des Frobenius-Automorphismus $\sigma_p = (t \mapsto t^p)$ berechnen?
    (ii) Wie kann man die Inverse des Frobenius-Automorphismus $\sigma_p = (t \mapsto t^p)$ eines algebraischen Abschlusses $\mathbb{F}_{p^\infty}$ von $\mathbb{F}_p$ berechnen? (4 Punkte)

20. Es sei $K = \mathbb{F}_{p^\infty}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$ und $\sigma_p : x \mapsto x^p$ der Frobenius-Automorphismus von $\mathbb{F}_{p^\infty}$. $\mathbb{F}_q$ bezeichne den Teilkörper von K mit genau q Elementen.
    Für eine beliebige Primzahl ℓ sei $K_\ell := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{\ell^m}}$ und $K^{(\ell)} := \bigcup_{\ell\nmid m\in\mathbb{N}_1} \mathbb{F}_{p^m}$.
    Zeigen Sie, dass K_ℓ und $K^{(\ell)}$ Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^\infty}$ sind und dass $\mathbb{F}_{p^\infty} = K_\ell \vee K^{(\ell)}$ und $K_\ell \cap K^{(\ell)} = \mathbb{F}_p$ gilt.
    Warum sind alle diese Teilkörper invariant unter jedem Automorphismus von K?
    Was lässt sich über die „Lage“ eines beliebigen endlichen Teilkörpers $\mathbb{F}_q$ bezüglich K_ℓ und $K^{(\ell)}$ sagen? (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben 17, 19 und 20 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 27. Mai 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.