Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 | Blatt 6

W.Knapp | Tübingen, den 12. Mai 2009

Einige Wiederholungsaufgaben aus der elementaren Theorie der Gruppen:

21. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe und sei H eine Untergruppe von G. $G : H = \{Hx \mid x \in G\}$ bezeichne die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen modulo H; ferner setze $H_G := \bigcap_{x\in G} H^x$, dabei ist $H^x = x^- Hx$. Beweisen Sie:
   (a) Die Abbildung $\pi : G \to \mathrm{Sym}\,(G : H) : g \mapsto g^\pi := (Hx \mapsto Hxg)$ ist ein Homomorphismus mit Kern H_G.
   Nach dem Homomorphiesatz gilt folglich $G/H_G \cong G^\pi$.
   Die Bildgruppe G^π ist eine transitive Untergruppe von $\mathrm{Sym}\,(G : H)$ und H_G ist der größte Normalteiler von G, welcher in H enthalten ist.
   (b) Falls $|G : H| = n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $|G/H_G| = |G : H_G|$ ein Teiler von $n!$.

22. Warum kann eine einfache nichtabelsche Gruppe keine Untergruppen vom Index $n \in \{2, 3, 4\}$ enthalten?
   Beweisen Sie: Wenn G eine endliche Gruppe ist mit einer Untergruppe H derart, dass $|G : H| = p$ der kleinste Primteiler von $|G|$ ist, so gilt $H \trianglelefteq G$.

Im Folgenden sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_{p^\infty}$ ein algebraischer Abschluss des Primkörpers $\mathbb{F}_p$. Weiter bezeichne $A_{p^\infty} := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^\infty})$ die Automorphismengruppe von $\mathbb{F}_{p^\infty}$.

23. Beweisen Sie:
   (a) A_{p^∞} lässt jeden endlichen Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^\infty}$ invariant.
   Ferner lässt A_{p^∞} auch die in Aufgabe 20 definierten Teilköper K_ℓ und$K^{(\ell)}$ für jede Primzahl ℓ invariant.
   (b) A_{p^∞} ist abelsch. (10 Punkte)

24. (a) Sei $q = p^n$ eine Potenz der Primzahl p und $\mathbb{F}_q$ bzw. $\mathbb{F}_{q^m}$ Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^\infty}$ mit genau q bzw. q^m Elementen.
   Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus σ von $\mathbb{F}_q$ in $\mathbb{F}_{p^\infty}$ genau m verschiedene Fortsetzungen zu einem Homomorphismus von $\mathbb{F}_{q^m}$ in $\mathbb{F}_{p^\infty}$ besitzt.
   (b) Zeigen Sie: A_{p^∞} besitzt eine Teilmenge, die gleichmächtig mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist; insbesondere ist A_{p^∞} nicht zyklisch. (10 Punkte)
   Hinweis: (a) kann mit Mitteln der Vorlesung auf verschiedene Weisen bewiesen werden. $\mathbb{R}$ ist bekanntlich gleichmächtig mit der Menge aller abzählbar unendlichen Folgen mit Werten in einer endlichen Menge mit wenigstens 2 Elementen. (Man kann auch zeigen, dass $|A_{p^\infty}| = |\mathbb{R}|$ gilt.)

Die Übungsaufgaben 23 und 24 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 10. Juni 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.