ÜBUNGEN ZUR KURSVORLESUNG ALGEBRA II

Sommersemester 2009 — Blatt 7

W.Knapp — Tübingen, den 29. Mai 2009

25. Beweisen Sie die Kettenregel für die Ableitung von Polynomen:
    Ist R ein K1-Ring und sind $f, g \in R[T]$, so gilt
    $f(g)' = f'(g) \cdot g'$.

26. Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist f separabel oder $f' = 0$.

27. Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Beweisen Sie, dass dann $L|\Im(L|K)$ schwach separabel ist, d.h. $\Im(L|\Im(L|K)) = \Im(L|K)$. Dabei bezeichnet $\Im(L|K)$ den Invariantenkörper von $L|K$.

Für die folgenden Aufgeben sei $F := \mathbb{F}_2(t)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten t über $\mathbb{F}_2$. Weiter sei $K := \mathbb{F}_2(t^2)$ und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von F; $\overline{K}$ ist dann auch ein algebraischer Abschluss von K. K ist somit der Quotientenkörper des faktoriellen Rings $R = \mathbb{F}_2[t^2]$ und t^2 ist ein Primelement von R. Ferner setzen wir $f := T^6 + t^2 \in K[T]$ und $g := T^3 + t^2 \in K[T]$. a sei eine fest gewählte Nullstelle von f in $\overline{K}$, $b := a^2$ und ω sei eine fest gewählte Nullstelle von $T^2 + T + 1$ in $\overline{K}$. *Beachten Sie*: ω ist eine primitive dritte Einheitswurzel, insbesondere gilt $\omega^3 = 1$.

28. Beweisen Sie:
    (a) Die Polynome f und g sind irreduzibel und es gilt $f = g(T^2)$.
    g ist separabel und f ist inseparabel.
    (b) In $\overline{K}[T]$ gelten die Faktorisierungen
    $f = (T^3 + t)^2 = ((T + a)(T + a\omega)(T + a\omega^2))^2$ und $g = (T + b)(T + b\omega)(T + b\omega^2)$.
    (c) $L := K(a, \omega)$ ist der Zerfällungskörper in $\overline{K}$ von f über K.
    $\Im(L|K) = F$ ist der Invariantenkörper von $L|K$.
    Die separable Hülle von K in L ist $S := S(L|K) = K(b, \omega)$.
    (d) Bestimmen Sie die Körpererweiterungsgrade $[L : K]$, $[S : K]$, $[F : K]$ und $[L : F]$ explizit, indem Sie jeweils eine konkrete Basis angeben. (10 Punkte)

29. Beweisen Sie:
    (a) $L|K$ besitzt genau einen Zwischenkörper M derart, dass $M|K$ Galoissch ist und $[M : K] = 2$ gilt. Es ist $M = K(\omega) \cong \mathbb{F}_4(t^2)$.
    (b) Die Teilkörper $L_x := K(x)$ sind für $x \in \{a, a\omega, a\omega^2\}$ paarweise verschieden. Ebenso sind die Teilkörper $S_y := K(y)$ für $y \in \{b, b\omega, b\omega^2\}$ paarweise verschieden.
    (c) $S|K$ und $L|F$ sind Galois-Erweiterungen und es gilt $\mathrm{Gal}\,(S|K) \cong \mathrm{Gal}\,(L|F) \cong \mathrm{Sym}_3$. (10 Punkte)

Die Übungsaufgaben 28 und 29 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 17. Juni 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.