Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 — Blatt 8

W.Knapp — Tübingen, den 3. Juni 2009

30. $M|K$ sei eine Körpererweiterung und E_1, E_2, E seien Zwischenkörper von $M|K$ mit $E = E_1 \vee E_2$. Beweisen Sie:
    Wenn $E_1|K$ und $E_2|K$ normale Körpererweiterungen sind,
    so sind $E|K$ und $(E_1 \cap E_2)|K$ normale Körpererweiterungen.
    (Zu beachten ist: Jede normale Körpererweiterung ist algebraisch.)

31. Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Weiter sei $f \in K[T]$ ein separables Polynom vom Grad ≥ 1 und L sei der Zerfällungskörper über K von f in $\overline{K}$ und $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ die Galois-Gruppe von f. Bezeichne W die Menge aller Nullstellen von f in $\overline{K}$ und sei $W : G = \{B_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ die Zerlegung von W in G-Bahnen.
    Beweisen Sie, dass die Primfaktoren von f in $K[T]$ genau die (paarweise verschiedenen) Polynome $f_i := \prod_{b \in B_i}(T - b)$ für $1 \leq i \leq r$ sind.

32. Sei K ein Körper und seien $f, g \in K[T]$ normiert und irreduzibel. Zeigen Sie: Gibt es in einem Erweiterungskörper L von K eine $a \in L$ mit der Eigenschaft $f(a) = 0 = g(a)$, so ist $f = g$.

Im Folgenden sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Primkörper der Charakteristik p und $\mathbb{F}_{p^\infty}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$. $\sigma_p : x \mapsto x^p$ bezeichne den Frobenius-Automorphismus von $\mathbb{F}_{p^\infty}$. Für $q = p^m$ bezeichne $\mathbb{F}_q$ den Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^\infty}$ mit genau q Elementen.

33. Für $q = p^m$ gelte $\mathbb{F}_{q^\ell} = \mathbb{F}_q(a)$ mit einem $a \in \mathbb{F}_{q^\ell}$. Beweisen Sie, dass dann das Polynom $p_a := \prod_{i \in \ell}(T - a^{q^i})$ das Minimalpolynom von a über $\mathbb{F}_q$ ist.
    (Beachten Sie den Spezialfall $q = p$.) (10 Punkte)

34. Beweisen Sie:
    (a) Die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{p^\infty}|\mathbb{F}_p$ ist eine (absolute) Galois-Erweiterung.
    Setze $G := \mathrm{Gal}\,(\mathbb{F}_{p^\infty}|\mathbb{F}_p) = A_{p^\infty}$ in der Bezeichnung von Blatt 6.
    (b) $\mathbb{F}_{p^\infty}$ besitzt keinen Teilkörper E derart, dass $\langle \sigma_p \rangle = \{\sigma \mid \sigma \in G \text{ und } x^\sigma = x \text{ für alle } x \in E\}$ gilt. (10 Punkte)
    (Die Abbildung Γ von (9.1) der Vorlesung ist somit in diesem Fall nicht surjektiv.)

35. Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Beweisen Sie:
    (a) $\overline{K}|\Im(\overline{K}|K)$ ist eine Galois-Erweiterung.
    (b) Wenn $\overline{K}|K$ nicht separabel ist, ist K ein nicht perfekter Körper der Charakteristik $p > 0$, insbesondere nicht endlich.
    (c) Geben Sie für beliebige Charakteristik $p > 0$ ein Beispiel an mit $\Im(\overline{K}|K) \neq K$.

Die Übungsaufgaben 33 und 34 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 24. Juni 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.