
ÜBUNGEN ZUR KURSVORLESUNG ALGEBRA II

Sommersemester 2009

Blatt 9

W.Knapp

Tübingen, den 8. Juni 2009

36. Sei p eine Primzahl und $L := \mathbb{F}_p(s, t)$ der Körper der rationalen Funktionen über \mathbb{F}_p in den Unbestimmten s, t ; weiter sei $K := \mathbb{F}_p(s^p, t^p)$. Dann ist $L|K$ eine rein inseparable Körpererweiterung vom endlichen Grad $[L : K] = p^2$ und $L = K(s, t)$.

(i) Beweisen Sie, dass $L|K$ keine einfache Körpererweiterung ist.

(ii) Geben Sie eine unendliche Menge von Zwischenkörpern von $L|K$ an.

(5 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie den Beweis von (2.10) der Vorlesung. In (9.6) der Vorlesung kann man also auf die Separabilitätsvoraussetzung nicht verzichten.

37. Beweisen Sie, dass $L|K := \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) | \mathbb{Q}$ eine (absolute) Galois-erweiterung ist mit zu $Z_2 \times Z_2$ isomorpher Galois-Gruppe $G := \text{Gal}(L|K)$.

Geben Sie eine geordnete Basis von $L|K$ explizit an und ebenso explizit die 4 Elemente von G . Bestimmen Sie alle Untergruppen von G und den Zwischenkörperverband (bzw. Teilkörperverband) $\mathcal{Z}(L|K)$.

Bestimmen Sie ein primitives Element a von $L|K$, also $L = K(a)$, und das Minimalpolynom $p_a \in \mathbb{Q}[T]$ von a über $K = \mathbb{Q}$.

(10 Punkte)

38. Untersuchen Sie, wann $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ für $0 \neq d_1, d_2 \in \mathbb{Q}$ gilt. Lässt sich hierbei \mathbb{Q} durch einen beliebigen Körper K ersetzen?

39. Sei p eine Primzahl. Betrachten Sie die absolute Galois-Erweiterung $\mathbb{F}_{p^\infty} | \mathbb{F}_p$ mit Galois-Gruppe $G = A_{p^\infty}$ in der Bezeichnungsweise von Blatt 6 der Übungen. Beweisen Sie, dass $H = \langle \sigma_p \rangle$ keine abgeschlossene Untergruppe ist. Was ist die abgeschlossene Hülle \overline{H} von H im Sinne von (9.3) der Vorlesung?

40. Sei $L|K$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L|K)$.

Beweisen Sie, dass für jedes m -Tupel $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ von Elementen $x_i \in L$ ein $z \in L$ existiert derart, dass $\bigcap_{i=1}^m G_{x_i} = G_z$ gilt.

(5 Punkte)

Die Übungsaufgaben 36, 37 und 40 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 1. Juli 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.