Übungen zur Kursvorlesung Algebra II

Sommersemester 2009 — Blatt 10

W.Knapp — Tübingen, den 5. Juni 2009

41. Wie lautet das Analogon des Hauptsatzes (9.14) für nicht notwendig endliche Galois-Erweiterungen? (Hierzu muss man nur verschiedene Sätze der Vorlesung entsprechend zusammenfassen.)

42. Es sei E der Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ des Polynoms $g = (T^2+1)(T^3-T+1)$. $\mathcal{N}(E|\mathbb{Q})$ bezeichne den Verband der (absolut) normalen Teilkörper von E. Bestimmen Sie $\mathcal{N}(E|\mathbb{Q})$ und stellen Sie das Ergebnis in einer Zeichnung dar. Die Teilkörper $K \in \mathcal{N}(E|\mathbb{Q})$ können Sie dadurch angeben, dass Sie Elemente $a_1, \ldots, a_r$ bestimmen derart, dass $K = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_r)$ gilt. Geben Sie möglichst für jedes $K \in \mathcal{N}(E|\mathbb{Q})$ ein primitives Element an (d.h. $r = 1$). (10 Punkte)
Hinweis: Siehe (9.17) der Vorlesung. Es ist natürlich auch erlaubt, den größeren Verband $\mathcal{Z}(E|\mathbb{Q})$ *aller* Zwischenkörper bzw. Teilkörper zu bestimmen.

43. Für jedes $n \in \mathbb{N}_1$ setze ${}^n\mathbb{Q} := \mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{n}))$. Beweisen Sie:
$$ {}^m\mathbb{Q} \le {}^n\mathbb{Q} \text{ genau dann, wenn } \begin{cases} m \text{ ein Teiler von } n \text{ ist,} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ m \text{ ein Teiler von } 2n \text{ ist,} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases} $$

44. (a) Für welche $n \in \mathbb{N}_1$ ist der Wert der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ eine Primzahlpotenz?
(b) Für welche $n \in \mathbb{N}_1$ ist der Wert der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ eine Primzahl?
(c) Für welche $n \in \mathbb{N}_1$ gilt $|\mathcal{Z}({}^n\mathbb{Q}|\mathbb{Q})| = 2$?

45. Sei $f \in \mathbb{Q}[T]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 4 mit genau 2 reellen Nullstellen a, b. Beweisen Sie, dass die Galois-Gruppe von f genau dann zur symmetrischen Gruppe Sym_4 isomorph ist, wenn $b \notin \mathbb{Q}(a)$ gilt. Andernfalls gilt $\mathrm{Gal}(f) \cong D_8$, wobei D_8 die Diedergruppe der Ordnung 8 bezeichnet. (10 Punkte)
Hinweis: Sym_4 hat zu D_8 isomorphe 2-Sylowgruppen.

Die Übungsaufgaben 42 und 45 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 8. Juli 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.