46. Beweisen Sie den „Translationssatz“ der Galois-Theorie:
Sei K ein Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschlus von K; E und F seien Zwischenkörper von $\overline{K}|K$ und $L = E \vee F$, weiter sei $E|K$ endlich und Galoissch. Dann ist auch $L|F$ eine endliche Galois-Erweiterung mit $[L : F] = [E : E \cap F]$, und die Abbildung $r_E : \mathrm{Gal}\,(L|F) \to \mathrm{Gal}\,(E|E \cap F) : \sigma \mapsto \sigma|_E$ ist wohldefiniert und ein Isomorphismus von Gruppen. (6 Punkte)

47. Sei $L|K$ eine endliche Galois-Erweiterung mit $L = K(a)$ und Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$. (N.B. Ein solches a existiert gemäß (9.6) der Vorlesung.)
Für jede Untergruppe $H \leq G$ setze $f_h := \prod_{\sigma \in H}(X - a^\sigma) = \sum_{i=0}^{h} a_{H,i} X^i$ mit $h = |H|$. Beweisen Sie:
Der Fixkörper von H ist $L_H = K(a_{H,0}, \ldots, a_{H,h-1})$. (6 Punkte)

48. (a) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}_1$, für welche eine Nullstelle des Polynoms $T^n - 7 \in \mathbb{Q}[T]$ (mit Zirkel und Lineal) konstruierbar ist. Warum sind dann jeweils alle Nullstellen konstruierbar?
(b) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) falls 7 durch andere ganz rationale Zahlen ersetzt wird? Diskutieren Sie alle möglichen Fälle. (8 Punkte)

49. Warum kann das regelmäßige 255-Eck aus den regelmäßigen n-Ecken mit $n = 3, 5, 17$ konstruiert werden? Lässt sich dieser Sachverhalt allgemeiner fassen?

50. Seien K_1 und K_2 isomorphe Körper, $\varphi : K_1 \to K_2$ ein Isomorphismus. $f_1 \in K_1[T]$ sei ein nichtkonstantes Polynom und L_1 ein Zerfällungskörper von f_1 über K_1. Weiter sei $f_2 := f_1^\varphi \in K_2[T]$ und L_2 sei ein Zerfällungskörper von f_2 über K_2. Setze weiter $G_1 := \mathrm{Aut}(L_1|K_1)$ und $G_2 := \mathrm{Aut}(L_2|K_2)$. Beweisen Sie:
Es existiert ein Isomorphismus $\psi : L_1 \to L_2$, welcher φ fortsetzt. Die Abbildung $G_1 \to G_2 : \sigma \mapsto \psi^{-1}\sigma\psi$ ist ein Isomorphismus von Gruppen. Falls $L_1|K_1$ Galoissch ist, ist auch $L_2|K_2$ eine Galois-Erweiterung und die Galois-Gruppen sind isomorph.

Die Übungsaufgaben 46, 47 und 48 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 15. Juli 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.