Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie

Sommersemester 2007 — Blatt 1

W.Knapp — Tübingen, den 2. April 2007

1. Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ quadratfrei (d.h. nicht durch das Quadrat einer Primzahl teilbar). Dann ist $X^2 - d$ irreduzibel im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ und ebenso im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$. Bezeichnet $\sqrt{d}$ eine komplexe Nullstelle des Polynoms $X^2 - d$, so ist folglich $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$, d.h. K ist ein Körper und $[K : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} K|\mathbb{Q} = 2$, denn $(1, \sqrt{d})$ ist eine $\mathbb{Q}$-Basis der Algebra $K|\mathbb{Q}$. (Man vereinbart bekanntlich, dass $\sqrt{d}$ positiv ist, falls d positiv ist.)
   (a) Beweisen Sie: Die Abbildung $\mu : a + b\sqrt{d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist ein Monomorphismus der Körpererweiterung $K|\mathbb{Q}$ in die Matrixalgebra $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, der Bildbereich von μ ist folglich ein zu K isomorpher Körper.
   Wie wird dabei der Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ abgebildet?
   (b) Für $x = a + b\sqrt{d} \in K$ setzt man $\mathbf{N}(x) := a^2 - db^2 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$.
   Welche Eigenschaften hat diese Norm-Abbildung $\mathbf{N} : x \mapsto \mathbf{N}(x)$?
   Beweisen Sie, dass $x = a + b\sqrt{d} \in R$ genau dann eine Einheit in R ist, wenn $\mathbf{N}(x) = \pm 1$ ist.
   (c) Zeigen Sie, dass der Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ für eine ganzrationale Zahl $d < -1$ nur die Einheiten ± 1 besitzt. (12 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ die unendliche Untergruppe $\{\pm(1 \pm \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt und dass diese Gruppe zum direkten Produkt $Z_2 \times Z_\infty$ isomorph ist.
   Dabei bezeichne Z_m die zyklische Gruppe der Ordnung m und Z_∞ die unendliche zyklische Gruppe. (8 Punkte)
   (Zusatz: Besitzt $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ noch weitere Einheiten?)

3. Wie lassen sich die Primelemente des Rings der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ durch eine Zeichnung „in der komplexen Zahlenebene“ anschaulich darstellen? Welche Symmetrien liegen vor? („Primelementteppich“)

Die Übungsaufgaben 1 und 2 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 25. April 2007, abzugeben.