Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie

Sommersemester 2007 — Blatt 4

W.Knapp — Tübingen, den 3. Mai 2007

12. Seien R ein Ring und A ein Teilring von R.
   (a) Sei $y \in R$. Beweisen Sie: Wenn R einen endlich erzeugten A-Untermodul M enthält derart, dass $1 \in M$ und $yM \subseteq M$ gilt, so ist y ganz über A.
   (b) Sei x eine Einheit von R. Beweisen Sie, dass jedes Element $y \in A[x] \cap A[x^{-1}]$ ganz über A ist. (7 Punkte)

   Hinweis: Verwenden Sie Argumente aus dem Beweis von (4.1) der Vorlesung.

13. Sei M ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n und M' ein Untermodul von M. Welche Beziehung besteht zwischen dem Index $|M : M'|$ im Sinne der Gruppentheorie und den Elementarteilern (invarianten Faktoren) von M'?

14. Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(A)$. Beweisen Sie:
   (a) Ist A ganzabgeschlossen und $f \in A[X]$ ein in $K[X]$ reduzibles normiertes Polynom, so ist f auch in $A[X]$ reduzibel.
   (b) Ist K eine Erweiterung endlichen Grades über seinem Primkörper, so ist die Torsionsuntergruppe der Einheitengruppe $\mathrm{U}(A) = A^*$ von A zyklisch von endlicher Ordnung, also eine Gruppe von Einheitswurzeln. Falls A ganzabgeschlossen ist, ist die Torsionsuntergruppe der multiplikativen Gruppe K^* des Körpers K gleich der Torsionsuntergruppe von A^*.

   Hinweis: Betrachten Sie bei (a) die Nullstellen von f in einer geeigneten Körpererweiterung von K. (7 Punkte)

15. Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $0 \neq x \in L$ sei algebraisch über K, $f_x = f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ sei das Minimalpolynom von x über K.
   Weiter seien $a, b \in K$ mit $a \neq 0$. Beweisen Sie:
   (a) x^{-1} ist algebraisch über K und das Minimalpolynom von x^{-1} über K ist gleich $a_0^{-1} X^n f(\frac{1}{X})$. Wie lässt sich dieses Polynom aus f durch „einfache Umformung“ gewinnen?
   (b) $x + b$ ist algebraisch über K und $f(X - b)$ ist das Minimalpolynom von $x + b$ über K.
   (c) ax ist algebraisch über K und $a^n f(a^{-1}X)$ ist das Minimalpolynom von ax über K. (6 Punkte)

   Hinweis: $f(\frac{1}{X})$ liegt im rationalen Funktionenkörper $K(X) = \mathrm{Quot}(K[X])$.

16. Seien A ein Ring und $a, b \in A$ mit $a \in \mathrm{U}(A) = A^*$. Beweisen Sie:
   (a) Die Einsetzungsabbildung $A[X] \to A[X] : f \mapsto f(aX + b)$ ist ein Automorphismus des Polynomrings (bzw. der Polynomalgebra) $A[X]$, welcher den Grad eines Polynoms unverändert lässt.
   (b) $f \in A[X]$ ist reduzibel in $A[X]$ genau dann, wenn $f(aX + b)$ reduzibel in $A[X]$ ist.

Die Übungsaufgaben 12, 14 und 15 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 16. Mai 2007, abzugeben.