W.Knapp Tübingen, den 10. Mai 2007

17. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit quadratfreiem $d > 1$ ein reeller quadratischer Zahlkörper und $R = R_K$ sei der Ring der (über $\mathbb{Z}$) ganzen Zahlen in K. Berechnen Sie die Fundamentaleinheit von R in den Fällen $d = 11, 13, 14, 15, 17, 19$. (6 Punkte)

18. Sei $a \in \mathbb{C}$ ganz über $\mathbb{Z}$. Für alle Nullstellen a_i des Minimalpolynoms von a über $\mathbb{Q}$ (vom Grad n) gelte $|a_i| \leq 1$. Beweisen Sie:
Entweder ist $a = 0$ oder es gilt $|a_i| = |a| = 1$ für alle $i \in n$.

19. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Zeigen Sie, dass $[K : \mathbb{Q}] = 4$ ist und dass $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ein primitives Element von $K|\mathbb{Q}$ ist, welches ganz über $\mathbb{Z}$ ist. Was ist das Minimalpolynom von γ über $\mathbb{Q}$?
(5 Punkte)

20. (a) Beweisen Sie das *Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein*:
Seien A ein faktorieller Ring, $K = \mathrm{Quot}(A)$ sein Quotientenkörper, $n \in \mathbb{N}_1$ und p ein Primelement von A. Weiter sei $f = \sum_{k \in n+1} a_k X^k \in A[X]$ ein Polynom derart, dass $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$, $a_k \equiv 0 \pmod{p}$ für alle $k \in n$ und $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Dann ist f irreduzibel in $K[X]$.
(b) Beweisen Sie mithilfe von (a) und der Übungsaufgabe 16, dass im Falle einer Primzahl p das Kreisteilungspolynom $\Phi_p = \sum_{i=0}^{p-1} X^i$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

21. Sei $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ und $\rho = \exp \frac{2\pi i}{3} \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die in $\mathbb{C}$ enthaltenen Körper $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ und $L := K(\rho) = \mathbb{Q}(\alpha, \rho)$.
(a) Beweisen Sie, dass für jedes Polynom $p \in \mathbb{Z}[X, Y]$ die Zahl $p(\alpha, \rho)$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.
(b) Beweisen Sie, dass $(1, \alpha, \alpha^2)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $K|\mathbb{Q}$ ist, $(1, \rho)$ eine K-Basis von $L|K$ und dass $(1, \alpha, \alpha^2, \rho, \rho\alpha, \rho\alpha^2)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $L|\mathbb{Q}$ ist, folglich $[L : \mathbb{Q}] = 6$ gilt. Geben Sie „Matrixmodelle“ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ (des Rahmens 3×3 bzw. 6×6) für die Körper K und L an.
(c) Bestimmen Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen σ von K in $\mathbb{C}$ explizit und beweisen Sie, dass stets $K^\sigma = \{z^\sigma | z \in K\}$ ein zu K über $\mathbb{Q}$ konjugierter Teilkörper von L ist. Bestimmen Sie weiter explizit alle K-Homomorphismen von L in $\mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass diese als K-Automorphismen von L aufgefasst werden können.
(9 Punkte)

Die Übungsaufgaben 17, 19 und 21 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 23. Mai 2007, abzugeben.