Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie

Sommersemester 2007 — Blatt 6

W.Knapp — Tübingen, den 23. Mai 2007

22. Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Aufgabe 21.
    (a) Bestimmen Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen von L in $\mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass diese als $\mathbb{Q}$-Automorphismen von L aufgefasst werden können.
    (b) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Gal}\,(L|\mathbb{Q})$ aller $\mathbb{Q}$-Automorphismen von $L|\mathbb{Q}$ zur symmetrischen Gruppe Sym_3 vom Grad 3 isomorph ist.
    (c) Bestimmen Sie ein primitives Element von $L|\mathbb{Q}$ und dessen Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$.

    Hinweis: Es ist nützlich, hier auch den in L enthaltenen Körper $N = \mathbb{Q}(\rho)$ zu betrachten.

23. Sei p eine Primzahl und $q = p^f$ eine Potenz von p. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_1$ setzen wir $f_q(n) = f(n)$ für die Anzahl aller normierten irreduziblen Polynome vom Grad n über $\mathbb{F}_q$.
    (a) Beweisen Sie, dass $\sum_{d|n} df(d) = q^n$ gilt.
    (b) Berechnen Sie die Werte $f(1), f(2), f(3), f(4)$ und $f(r)$ für Primzahlen r.

    Hinweis: Betrachten Sie die Minimalpolynome über $\mathbb{F}_q$ von Elementen von $\mathbb{F}_{q^n}$.

24. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ und $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, siehe Übungsaufgabe 19. Berechnen Sie die beiden Diskriminanten $D_{K|\mathbb{Q}}(1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3)$ und $D_{K|\mathbb{Q}}(1, \alpha, \beta, \alpha\beta)$.
    (8 Punkte)

25. Berechnen Sie für $n = 3, 4, 5$ alle sogenannten *Kreisteilungseinheiten* $u_{k,l} = (\zeta^k - 1)/(\zeta^l - 1)$ mit $k, l \in n' = \{m \mid m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n \text{ und } \mathrm{ggT}(m, n) = 1\}$ und skizzieren Sie deren Lage in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Dabei bezeichne $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ die primitive n-te „Standard"-Einheitswurzel. Wieviele verschiedene Kreisteilungseinheiten gibt es jeweils? Bilden sie jeweils eine Gruppe?
    Warum sind diese Kreisteilungseinheiten alle ganz über $\mathbb{Z}$? (6 Punkte)
    Hinweis: Beachten Sie (2.3) der Vorlesung! Offensichtlich gilt $u_{k,l}^{-1} = u_{l,k}$.

26. (a) Sei $K = \mathbb{Q}(t)$ ein algebraischer Zahlkörper im engeren Sinne, also $[K : \mathbb{Q}] = n \in \mathbb{N}$, und t sei ganzalgebraisch, also t ganz über $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie: Ist $(x_i)_{i \in n}$ ein n-Tupel von Elementen von $\mathbb{Z}[t]$ und gilt für die Diskriminante $D_{K|\mathbb{Q}}(x_i)_{i\in n} = d$ mit einer quadratfreien ganzrationalen Zahl d, so ist $(x_i)_{i\in n}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[t]$.
    (b) Es sei $d \neq 1$ eine quadratfreie ganzrationale Zahl und δ sei die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Beweisen Sie, dass $(1, (\delta + \sqrt{\delta})/2)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis des Rings der ganzalgebraischen Zahlen R_K ist. (6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 24, 25 und 26 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 6. Juni 2007, abzugeben.