Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie

Sommersemester 2007 Blatt 7

W.Knapp Tübingen, den 24. Mai 2007

27. Sei $K = \mathbb{Q}[d]$ ein reeller quadratischer Zahlkörper mit quadratfreiem $1 < d \in \mathbb{Z}$; u_1 bezeichne die Fundamentaleinheit von K bzw. von R_K.
Es gelte zunächat $d \equiv 2, 3 \pmod 4$.
   (a) Beweisen Sie: Wenn $\mathbf{N}_{K|\mathbb{Q}}(u_1) = 1$ ist, so hat die Pell-Fermat-Gleichung $a^2 - db^2 = -1$ keine Lösung $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   (b) Was kann über die Lösungen der Pell-Fermat-Gleichungen $a^2 - db^2 = -1$ und $a^2 - db^2 = 1$ gesagt werden, falls $\mathbf{N}_{K|\mathbb{Q}}(u_1) = -1$ ist?
   (c) Was kann analog im Fall $d \equiv 1 \pmod 4$ bewiesen werden? (4 Punkte)

28. Sei K ein algebraischer Zahlkörper im engeren Sinne, also $[K : \mathbb{Q}] = n \in \mathbb{N}$, und $(x_i)_{i \in n}$ ein über $\mathbb{Q}$ linear unabhängiges n-Tupel von Elementen von R_K, dem Ring der ganzalgebraischen Zahlen von K. Bezeichne M den von $(x_i)_{i \in n}$ erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul. Beweisen Sie:
   (a) Es gibt einen injektiven Endomorphismus des $\mathbb{Z}$-Moduls R_K mit Bild M, dessen Determinante (fortgesetzt zu einem Automorphismus des $\mathbb{Q}$-Vektorraums K) sei a. Dann gilt $|a| = |R_K : M|$.
   (b) Ist δ_K die Diskriminante von K, so gilt $d := D_{K|\mathbb{Q}}(x_i)_{i \in n} = a^2 \delta_K$. Insbesondere haben d und δ_K das gleiche Vorzeichen.
   (c) Gilt in $\mathbb{Z}$ die Gleichung $d = {d_0}^2 d_1$, wobei d_1 quadratfrei ist und $d_0 > 0$, so ist $|R_K : M|$ ein Teiler von d_0 und es gilt $M \leq R_K \leq \frac{1}{d_0} M = \{\frac{1}{d_0} y \mid y \in M\}$.
   Wenn d quadratfrei ist, gilt deshalb $M = R_K$.
   $(x_i)_{i \in n}$ ist eine Ganzheitsbasis von K genau dann, wenn $d = \delta_K$. (8 Punkte)

29. Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Übungsaufgabe 28.
Wähle für jedes $i \in n$ ein $y_i = \frac{1}{d_0} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} x_j \in R_K$ mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ so, dass $|a_{ii}| > 0$ und kleinstmöglich ist.
Beweisen Sie, dass $(y_i)_{i \in n}$ eine Ganzheitsbasis von K ist.
Welche Probleme gibt es, wenn man dies Verfahren als Algorithmus durchführen will?

30. Sei $n = p^m$ für eine Primzahl p und $m \in \mathbb{N}_1$. Wie in der Vorlesung setze $n' = \{k \mid k \in n \text{ und } \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}$. Weiter sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und ${}^n\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\zeta)$ sei der n-te Kreisteilungskörper. Bezeichne $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{{}^n\mathbb{Q}|\mathbb{Q}}$ und $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{{}^n\mathbb{Q}|\mathbb{Q}}$ die Spur- und die Normabbildung.
   (a) Berechnen Sie $\mathbf{T}(\zeta^k)$ und $\mathbf{T}(1 - \zeta^k)$ für jedes $k \in n$.
   (b) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in n'$ die Gleichung $\mathbf{N}(1 - \zeta^k) = p$ gilt. Was gilt hier im Fall $k \in n \setminus n'$? (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben 27, 28 und 30 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 13. Juni 2007, abzugeben.