ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG ALGEBRAISCHE ZAHLENTHEORIE

Sommersemester 2007 Blatt 9

W.Knapp Tübingen, den 28. Juni 2007

35. Beweisen Sie Satz (8.21) der Vorlesung:
Für einen Ring R sind gleichwertig:
(a) R ist Dedekindsch und faktoriell.
(b) R ist ein Hauptidealring.

36. Sei R ein Dedekind-Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathrm{I}(R)$. Beweisen Sie:
(i) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in \mathrm{I}(R)$.
(ii) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

37. Wir übernehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Übungsaufgabe 33:
Es sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ und $R_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ der Ring der ganzalgebraischen Zahlen von K. Setze $\mathfrak{p}_0 := (\sqrt{-5}), \mathfrak{p}_1 := (2, 1 + \sqrt{-5}), \mathfrak{p}_2 := (3, 1 + \sqrt{-5})$ und $\mathfrak{p}_3 := (3, 1 - \sqrt{-5})$.
(a) Berechnen Sie die inversen Ideale $\mathfrak{p}_k^{-1}$ für $k \in 4$.
(b) Beweisen Sie, dass die von den Idealklassen $\mathfrak{p}_k\mathrm{F}(K)$, $1 \leq k \leq 3$, erzeugte Untergruppe der Idealklassengruppe $\mathrm{C}(K)$ die Ordnung 2 besitzt. (7 Punkte)

Hinweis: Man kann zeigen, dass in der Tat sogar $h_K = |\mathrm{C}(K)| = 2$ gilt.

38. Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante $\delta = \delta_K$. Beweisen Sie:
Für jedes von $\{0\}$ verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ von R_K gibt es ein $0 \neq a \in \mathfrak{a}$ derart, dass $|\mathrm{N}(a)| \leq \frac{|\delta|+9}{4}|\mathrm{N}(\mathfrak{a})|$ gilt. (6 Punkte)

39. Sei R ein Ring, wie immer kommutativ mit Einselement $1 \neq 0$.
Ein Element $x \in R$ heißt bekanntlich *nilpotent* genau dann, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $x^m = 0$ gilt.
Die Menge $\mathbf{N}(R) := \{x \mid x \in R \text{ und } x \text{ ist nilpotent } \}$ heiße das *Nilradikal* von R.
(a) Beweisen Sie: $\mathbf{N}(R)$ ist ein Ideal von R und es gilt $\mathbf{N}(R/\mathbf{N}(R)) = \{0\}$.
(b) Berechnen Sie $\mathbf{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ für eine natürliche Zahl $n > 1$. Wie lässt sich das Ergebnis von $\mathbb{Z}$ auf Dedekind-Ringe R verallgemeinern?

(7 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie zum Beweis die binomische Formel.

Anmerkung: Man nennt den Faktorring $R/\mathbf{N}(R)$ den zu R gehörigen *reduzierten* Ring. R heißt deshalb *reduziert* genau dann, wenn $\mathbf{N}(R) = \{0\}$ gilt.

40. Sei R ein Ring, $n \in \mathbb{N}_1$ und M ein freier R-Modul mit einer R-Basis $(x_i)_{i\in n}$. Weiter sei $\mathfrak{a}$ ein von R verschiedenes Ideal von R und $\overline{R} := R/\mathfrak{a}$ der zugehörige Faktorring. Beweisen Sie:
(i) $\mathfrak{a}M = \bigoplus_{i\in n} \mathfrak{a}x_i$ ist ein R-Untermodul von M.
(ii) $M/\mathfrak{a}M$ ist ein freier $\overline{R}$-Modul mit Basis $(x_i + \mathfrak{a}M)_{i\in n}$.

Die Übungsaufgaben 37, 38 und 39 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 27. Juni 2007, abzugeben.