Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 Blatt 1

W.Knapp Tübingen, den 6. Oktober 2006

1. Stellen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ zeichnerisch dar:
   (i) $A_1 := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } |z-a| \geq r\}$ mit $a \in \mathbb{C}, 0 \leq r \in \mathbb{R}$.
   (ii) $A_2 := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } 0 \leq \mathrm{Re}(iz) < 2\pi\}$.
   (iii) $A_3 := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } \mathrm{Re}(z^2) \leq c\}$, wobei $c \in \mathbb{R}$.
   (iv) $A_4 := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } |z| = c|z+1|\}$ mit $0 < c \in \mathbb{R}$.
   Welche dieser Mengen sind offen, abgeschlossen, zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Machen Sie sich klar, dass das reelle euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ durch $\langle z, w \rangle := \mathrm{Re}(z\overline{w})$ definiert wird; $(1, i)$ ist dann die Standard-Orthonormalbasis. Beweisen Sie, dass jede Orthonormalbasis von der Gestalt (c, ic) oder $(c, -ic)$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ ist. Zeigen Sie, dass sich die Elemente von $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ (Spiegelungen) und von $\mathrm{SO}(2)$ (Drehungen) durch die Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
   $m_c : z \mapsto cz$ bzw. $\overline{m}_c : z \mapsto c\overline{z}$
   mit $c \in \mathbb{C}$ und $|c| = 1$ beschreiben lassen.

3. Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:
   $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$,
   $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$,
   $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
   Deuten Sie diese Sachverhalte elementargeometrisch. Warum kann man die ersten beiden (gleichwertigen) Aussagen als *Cosinus-Satz* bezeichnen? (4 Punkte)

4. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f_j : D_j \to \mathbb{R}, j \in 3$, wobei
   $f_0(z) = \mathrm{Im}\,(\exp(z))$ mit $D_0 = \{z | z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq \pi \text{ und } |\mathrm{Re}(z)| \leq 1\}$,
   $f_1(z) = |\sin z|$ mit $D_1 = i \cdot D_0$,
   $f_2(z) = |z^3 - z^2|^{-1}$ mit $D_2 = \{z | z \in \mathbb{C}, |z| \leq 2 \text{ und } z^3 \neq z^2\}$. (6 Punkte)

5. Seien $b \in \mathbb{C}, a, c \in \mathbb{R}$ und gelte $ac - b\overline{b} < 0$.
   Dann ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto p(z) := az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c$ eine reell (höchstens) quadratische Polynomfunktion.
   (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $p(z) = 0$ eine Kreislinie oder eine reell-affine Gerade in der komplexen Ebene darstellt.
   (b) Zeigen Sie, dass jede Kreislinie und jede reell-affine Gerade in der komplexen Ebene die Gestalt $\{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } p(z) = 0\}$ mit einem geeigneten p der angegebenen Art hat.
   (c) Was stellt die Menge $D := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } p(z) > 0\}$ dar ? (10 Punkte)

Die Übungsaufgaben 1 und 2 sind für die ersten Übungsstunden vorzubereiten. Die Übungsaufgaben 3, 4 und 5 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 23. Oktober 2006, abzugeben.