Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 2

W.Knapp — Tübingen, den 12. Oktober 2006

6. Beweisen Sie : Ist $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq c \in \mathbb{C}$, so hat c genau n verschiedene n-te Wurzeln ζ in $\mathbb{C}$, d.h. es gilt $\zeta^n = c$. Skizzieren Sie die Lage dieser Wurzeln in der komplexen Ebene für die Fälle $n = 3, 4, 5$ und $c = 2, -2, i$. (6 Punkte)

7. Sei $S := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Welche Bedingung muss $f(t)/t$ für $t \in S$ erfüllen, damit der Vektor $f(t)$ „tangentiell" an S im Punkt t ist?
   Testen Sie dieses für die Funktion $f(z) := \alpha - \overline{\alpha} z^2$ mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{C}$ und skizzieren Sie f als Vektorfeld im Fall $\alpha = 1$. (6 Punkte)

8. (a) Beweisen Sie, dass die Funktionen
   $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ und $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
   auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind. Berechnen Sie die Ableitungen von sin und cos.
   (b) Berechnen Sie die Nullstellen von $\sin z$ und $\cos z$ in $\mathbb{C}$.
   (c) Berechnen Sie $\sin^2 z + \cos^2 z$ für $z \in \mathbb{C}$.
   (d) Skizzieren Sie die Menge $\{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } |\sin z| \leq 1\}$. (8 Punkte)

9. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f : A \to B, g : B \to \mathbb{C}$ Funktionen derart, dass f in $a \in A$ und g in $b := f(a)$ reell differenzierbar sind. Definiere $\overline{f} : A \to \mathbb{C}$ durch $\overline{f}(z) := \overline{f(z)}$.
   (a) Beweisen Sie
   $$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}(a)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a) \text{ und } \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(a).$$
   (b) Beweisen Sie die Kettenregel für die Wirtinger-Ableitungen:
   $$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(b)\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(a),$$
   $$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(b)\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a).$$

Die Übungsaufgaben 6,7 und 8 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 30. Oktober 2006, abzugeben.