Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 3

W.Knapp — Tübingen, den 8. November 2006

10. Sei $f(z) := 2z^2\overline{z} - z\overline{z}^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
    (a) Beweisen Sie, dass f überall reell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen
    $$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$
    (b) In welchen Punkten $a \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung $f'(a)$. (6 Punkte)

11. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:
    Es existiert eine holomorphe Funktion $f : z \mapsto f(z)$ auf $\mathbb{C}$ derart, dass der Realteil $\mathrm{Re}(f) = u$ ist mit
    (i) $u(z) := x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$,
    (ii) $u(z) := x^3 - 6x^2 - 3xy^2 + 2y^2$.
    Dabei ist wie üblich $z = x + iy$ mit $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}\,(z)$ gesetzt. (6 Punkte)

12. Sei D ein Gebiet in $\mathbb{C}$, also nichtleer, offen und zusammenhängend, weiter sei $f = u + iv$ holomorph in D mit Realteil $\mathrm{Re}(f) = u$. Beweisen Sie:
    Ist $\hat{v} : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so ist $\hat{f} = u + i\hat{v}$ genau dann holomorph in D, wenn $v - \hat{v}$ konstant in D ist. (4 Punkte)

13. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei D ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Beweisen Sie:
    Wenn $f'(z) = 0$ ist für alle $z \in D$, so ist f konstant.
    Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Voraussetzung, dass D zusammenhängend ist, notwendig ist. (4 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 6. November 2006, abzugeben.