Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 4

W.Knapp — Tübingen, den 8. November 2006

14. Bezeichen K das kompakte Rechteck in $\mathbb{C}$ mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$. Berechnen Sie durch direkte Anwendung der Definitionen die Integrale

$$\int_{\partial K} \frac{dz}{z} \quad \text{und} \quad \int_{\partial K} \mathrm{Re}(z).$$

(6 Punkte)

15. Sei $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$ eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass f konstant ist, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   (i) $|f|$ ist konstant.
   (ii) Es gibt eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen in keinem Punkt gleichzeitig verschwinden und für die $F(u, v) \equiv 0$ gilt.

(6 Punkte)

16. Seien $\gamma_1(t) := (\cos t)e^{it}$, $\gamma_2(t) := (\cos 2t)e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $\gamma_3(t) := te^{2\pi it}$ für $0 \leq t \leq 1$.
   (a) Skizzieren Sie die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.
   (b) Berechnen Sie die Länge von γ_1.
   (c) Berechnen Sie für $k = 1, 2, 3$ das Integral $I_k := \int_{\gamma_k} ze^z dz$.

   (*Hinweis*: Finden Sie eine Stammfunktion!)

(8 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 13. November 2006, abzugeben.