Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 5

W.Knapp — Tübingen, den 9. November 2006

17. Es bezeichne $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sigma(z) := \overline{z}$ die Konjugationsabbildung auf $\mathbb{C}$.
Weiter sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion und $U^\sigma := \sigma(U)$.
Dann ist $f^\sigma := \sigma \circ f \circ (\sigma|_{U^\sigma})$ eine auf U^σ definierte Funktion. Beweisen Sie:
   (i) U^σ ist offen in $\mathbb{C}$.
   (ii) f ist genau dann holomorph in U, wenn f^σ holomorph in U^σ ist.

(6 Punkte)

18.
   (a) Zeigen Sie, dass $G := \{re^{it} | 0 < r \in \mathbb{R} \text{ und } |t| < \pi\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Skizzieren Sie dieses.
   (b) Zeigen Sie, dass durch $f(re^{it}) := \ln(r) + it$ eine Funktion auf G definiert wird mit der Eigenschaft $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in G$.
   (c) Sei $f = u + iv$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil.
   Berechnen Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$ für $z = x + iy$ mit $\mathrm{Re}(z) = x$ und zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass f holomorph ist.

(7 Punkte)

19. Sei $D \subseteq \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet mit $1 \in D$ und f sei eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf D mit der Eigenschaft $f(1) = 0$. Beweisen Sie:
   (a) Für jedes $0 < r \in \mathbb{R}$ existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = r$ und $w \notin D$.
   (b) $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in D$. (*Hinweis*: $\exp(f(z))/z$ ist konstant!)
   (c) Es existiert genau eine stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = 0$ und $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ für alle $z \in D$.
   (f heiße der *Hauptzweig des Logarithmus auf* D, vgl. auch Übungsaufgabe 18.)

(7 Punkte)

20. Beweisen Sie den Hilfssatz (6.9) der Vorlesung.

Die Übungsaufgaben 17, 18 und 19 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 20. November 2006, abzugeben.