Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 Blatt 6

W.Knapp Tübingen, den 9. November 2006

21. Sei $K := \{z | z \in \mathbb{C} \text{ und } |z| \leq 1\}$ und $f : K \to \mathbb{C}$ sei stetig und im Inneren von K holomorph. Beweisen Sie:
$$\int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 0.$$
(4 Punkte)

22. Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^k$ genau dann in einer Umgebung von 0 injektiv, wenn $k = 1$ ist.

23. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$ und $F : I \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar.
    (a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an F' dafür an, dass F eine Stammfunktion von f längs einer glatten Kurve $\gamma : I \to D$ ist.
    (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) eine Stammfunktion längs γ für $I = \mathbb{R}$, $\gamma(t) = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ und $D = \mathbb{C}^\bullet$.
    Skizzieren Sie γ in Abhängigkeit von α in den „typischen" Fällen.

(8 Punkte)

24. Die geschlossenen Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien definiert durch
$$\gamma_1(t) := 1 + 2|t|e^{\pi i t}, \;\; \gamma_2(t) := e^{2\pi i t}.$$
    (a) Berechnen Sie unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes das Integral
$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}.$$
    (b) Sind γ_1 und γ_2 homotop als geschlossene Kurven in $\mathbb{C}^\bullet$? (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben 21, 23 und 24 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 27. November 2006, abzugeben.