Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 7

W.Knapp — Tübingen, den 9. November 2006

25. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine auf D holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $\tan(f(z)) = z$ für alle $z \in D$ (genannt Zweig des Arcustangens).
    (i) Berechnen Sie $f'(z)$ und zeigen Sie, dass $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ gilt.
    (ii) Beweisen Sie, dass in $D := \{z \mid z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) \neq 0 \text{ oder } |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$ genau ein $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $f(0) = 0$ und $\tan(f(z)) \equiv z$ existiert (Hauptzweig des Arcustangens).
    (iii) Das Gebiet D in (ii) ist maximal in dem Sinn, dass auf keinem echten Obergebiet von D ein Zweig des Arcustangens existiert.

    (8 Punkte)

    Hinweis: Beachten Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{1+z^2}$.

26. Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass die reelle Funktion $\arctan(x)$ Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist und deshalb insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

gilt. Geben Sie hierfür einen alternativen Beweis unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes. (6 Punkte)

Hinweis: Man betrachte für $K_r := \{z | z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z - i| \leq r\}$ Integrale der Gestalt $\displaystyle\int_{\partial K_r} \frac{1}{1+z^2}\,dz$.

27. Sei $D := \{z \mid z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) \neq 0 \text{ oder } |\operatorname{Im}(z)| > 1\}$.
    (a) Ist D einfach zusammenhängend?
    (b) Existiert ein Zweig des Arcustangens auf D?

28. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Integrale:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)(z-1)^2}\,, \quad \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz\,, \quad \int_{|z+2i|=3} \frac{\exp(z)}{z^2+\pi^2}\,dz\,.$$

(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 25, 26 und 28 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 4. Dezember 2006, abzugeben.