# Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 8

W.Knapp — Tübingen, den 25. November 2006

29. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ fest gegeben. Bestimmen Sie die Werte des Integrals

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} \, ,$$

wobei $\gamma$ alle stückweise glatten geschlossenen Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ durchläuft.

(4 Punkte)

30. $f$ und $g$ seien holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z) = g(\frac{1}{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $f$ und $g$ konstant sind.

31. Es sei $f = \sum_{n=0}^\infty c_n X^n \in \mathcal{F} = \mathbb{C}[[X]]$ eine formale Potenzreihe. Beweisen Sie:
   (a) $f$ ist genau dann in $\mathcal{F}$ invertierbar, wenn $c_0 \neq 0$ gilt. (Geben Sie insbesondere eine Rekursionsformel für die Koeffizienten von $f^{-1} = \frac{1}{f}$ an, falls $c_0 \neq 0$ ist.)
   (b) Ist $f$ eine konvergente Potenzreihe mit $c_0 \neq 0$ und ist $g = \frac{1}{f} = \sum_{n=0}^\infty d_n X^n \in \mathcal{F} = \mathbb{C}[[X]]$ die nach (a) bestimmte Inverse, so ist $g$ ebenfalls konvergent und in einer Umgebung von 0 gilt $f(z)g(z) = 1$.

(4 Punkte)

32. Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen in $\mathcal{F} = \mathbb{C}[[X]]$:
   (i) $\sum_{n=1}^\infty n^\alpha X^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (ii) $\sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n})^{n^2} X^n$,
   (iii) $\sum_{n=0}^\infty 2^{-n} X^{2^n}$.

(6 Punkte)

33. Es sei $H := \{z \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und log bezeichne den Hauptzweig des Logarithmus auf $H$.
   (a) Bestimmen Sie um jeden Punkt $a \in H$ die Potenzreihenentwicklung $\log z = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-a)^n$ und deren Konvergenzgebiet $H_a$. Die darauf repräsentierte Funktion werde mit $f_a$ bezeichnet.
   (b) Für welche Punktepaare $(a, b)$ in $H$ gilt $-1 \in H_a \cap H_b$ und $f_a(-1) \neq f_b(-1)$?

(6 Punkte)

*Hinweis*: Bei (b) empfiehlt es sich, Rechnungen durch Argumente zu ersetzen.

Die Übungsaufgaben 29, 31, 32 und 33 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 11. Dezember 2006, abzugeben.