Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 Blatt 9

W.Knapp Tübingen, den 25. November 2006

34. Zeigen Sie: für jedes nicht-konstante $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

35. Entwickeln Sie folgende Funktionen f in eine Potenzreihe um den Nullpunkt und bestimmen Sie den Konvergenzradius:
(i) $f(z) := \dfrac{2z+3}{z+1}$, (ii) $f(z) := \log(1+z)$. (4 Punkte)

36. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und f eine auf dem Abschluss $\overline{D}$ von D nicht-konstante stetige Funktion, deren Einschränkung auf D holomorph ist.
   (a) Zeigen Sie: Ist $|f|$ konstant auf dem Rand ∂D von D, so hat f eine Nullstelle in D.
   (b) Gilt die Aussage in (a) auch dann, wenn die Beschränktheit von D nicht vorausgesetzt wird ?

37. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) := ((z-i)(z-2))^{-1}$ um $a = 1$ in eine Laurent-Reihe so, dass die Reihe für
(i) $z = \frac{1}{2}$, (ii) $z = \frac{i}{2}$, (iii) $z = 2i$
konvergiert. Welches sind die genauen Konvergenzgebiete dieser Reihen?
(6 Punkte)

38. Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und geben Sie an, von welcher Art sie sind:
(i) $f(z) = z/(e^z - 1)$, (ii) $f(z) = (1-e^z)/(1+e^z)$,
(iii) $f(z) = (\sin z + \cos z)^{-1}$, (iv) $f(z) = \exp(-1/z)$, (v) $f(z) = 1/\sin(\pi/z)$.
(5 Punkte)

39. (a) f und g seien holomorphe Funktionen auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$. Es gelte $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$ für ein $a \in D$.
Beweisen Sie, dass für $h := f/g$ gilt $\operatorname{Res}_h(a) = f(a)/g'(a)$.
(b) Berechnen Sie $\operatorname{Res}_h(a)$ für jedes $a \in \mathbb{C}$ in den folgenden Fällen:
(i) $h(z) := (z(e^z - 1))^{-1}$, (ii) $h(z) := (z(z-\pi))^{-2}$,
(iii) $h(z) := (1+z^n)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. (5 Punkte)

Die Übungsaufgaben 35, 37, 38 und 39 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 18. Dezember 2006, abzugeben.