Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 10

W.Knapp — Tübingen, den 7. Dezember 2006

40.

(a) Durch die linearen Gleichungen $a_1x + b_1y = c_1, a_2x + b_2y = c_2$ sind zwei Geraden im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ gegeben. Wann schneiden sich diese Geraden orthogonal?

(b) Zwei stetig differenzierbare Funktionskurven $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ seien gegeben. Wann schneiden sich diese Kurven orthogonal?

(c) Beweisen Sie: Wenn eine Schar $(y_c)_{c\in I}$ von Funktionskurven genau aus den Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besteht, so ist jede Funktionskurve $y = g(x)$, welche alle y_c orthogonal schneidet, eine Lösung der Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{f(x,y)}$.
In welchem Sinn kann man von zueinander *orthogonalen Scharen* von $\mathcal{C}^1$-Funktionskurven reden?

(6 Punkte)

41.

(a) Gegeben sei eine ganze Zahl $m \neq 0$. Stellen Sie für die Kurvenschar $y_c(x) = c \cdot x^m \quad (c \in \mathbb{R})$ eine Differentialgleichung 1. Ordnung auf, indem Sie die Gleichung der Schar differenzieren und den Scharparameter c eliminieren.

(b) Bestimmen Sie die Differentialgleichung der hierzu orthogonalen Kurvenschar und lösen Sie diese. (Bringen Sie hierzu y und y' auf eine Seite der Differentialgleichung.)
Skizzieren Sie die Fälle $m = 2, 3, \ldots$; $m = 1$; $m = -1, -2, \ldots$.

(8 Punkte)

42. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{x+2}{x+1}y = \frac{2\sin x}{x+1}, \qquad y(0) = 2.$$

(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 8. Januar 2007, abzugeben.