Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 11

W.Knapp — Tübingen, den 7. Dezember 2006

43. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \lambda y(x) + (cx+d)e^{\lambda x}, \;\; y(0) = y_0$$

mit reellen Parametern c, d, λ, y_0 und $\lambda \neq 0$. (6 Punkte)

44. Die *Bernoullische Differentialgleichung* mit dem Exponenten $\alpha \neq 1$ lautet

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\alpha},$$

wobei a und b stetige Funktionen auf $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0\}$ sind.

(a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung durch die Transformation $y(x) = u(x)^{\beta}$ mit einem geeigneten Exponenten $\beta \in \mathbb{R}$ in eine äquivalente (inhomogene) lineare Differentialgleichung für u transformiert werden kann.

(b) Lösen Sie hiermit das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^2, \;\; y(1) = 2.$$

Machen Sie die Probe! (8 Punkte)

45. Lösen Sie das Anfangswertproblem für einen vorgegebenen Wert $y_0 > 0$

$$y'(x) = x^2y(x)^2, \;\; y(0) = y_0.$$

Auf welchem 0 enthaltenden größten Intervall I_0 sind die Lösungen dieses Anfangswertproblems definiert?

(6 Punkte)

N.B. Die Funktionen in den Termen der Differentialgleichung sind überall auf $\mathbb{R}$ definiert.

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 15. Januar 2007, abzugeben.