Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/07 — Blatt 12

W.Knapp — Tübingen, den 11. Januar 2007

46. Qualitative Diskussion der „logistischen Differentialgleichung“
$$y' = ay(N-y), \;\; 0 < a, N \in \mathbb{R}.$$
Folgern Sie direkt aus aus der Differentialgleichung:
(a) Für jede Lösung y ist auch u mit $u(x) := y(x - x_0), x_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung.
(b) $y(x) = 0$ und $y(x) = N$ sind zwei konstante Lösungen.
(c) Für jede auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung y mit $y(0) \in]0, N[$ gilt
$$\lim_{x\to\infty} y(x) = N \text{ und } \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$$
und y hat an der Stelle x_1 mit $y(x_1) = \frac{1}{2}N$ einen Wendepunkt.
(d) Skizzieren Sie (grob) den Verlauf der betrachteten Lösungen.
(6 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie bei (c) den Satz (11.10) der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = N$ gilt, indem Sie für das Abstandsquadrat $u(x) = (N - y(x))^2$ eine lineare homogene Differentialgleichung herleiten und $y(x) \geq y(0) > 0$ für $x \geq 0$ beachten. Die zweite Limesaussage ergibt sich analog.

47. Führen Sie das Anfangswertproblem $y' = \frac{3x+2y-7}{x-y+1}$, $y(2) = 1$ auf ein Anfangswertproblem mit getrennten Variablen zurück und geben Sie für die Lösung eine implizite Darstellung $F(x, y(x)) = 0$ an. (8 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Variablentransformation $x = X + \xi, y = Y + \eta$, wobei (X, Y) die Lösung des linearen Gleichungssystems
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist; dann substituieren Sie $u = \frac{\eta}{\xi}$.

48. (a) Gegeben sei das Anfangswertproblem 2. Ordnung
$$y'' = 2y + 3y' + x^2, \;\; y(0) = 1, y'(0) = 2.$$
Bestimmen Sie ein hierzu äquivalentes Anfangswertproblem 1. Ordnung
$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u} + \mathbf{c}, \;\; \mathbf{u}(0) = \mathbf{u_0},$$
wobei $\mathbf{u}, \mathbf{c} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\mathbf{u_0} \in \mathbb{R}^2$ gilt.
(b) Zeigen Sie an folgendem Beispiel, dass sich auch *Systeme* 2. Ordnung auf äquivalente Systeme 1. Ordnung transformieren lassen:
$\mathbf{y}'' = B(x)\mathbf{y}$ mit $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^m)$ und $B(x) = (b_{ik}(x))$ eine $m \times m$ - Matrix mit Einträgen in $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, dabei I ein nicht leeres offenes reelles Intervall.
Betrachten Sie den Spezialfall $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ explizit. (6 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 22. Januar 2007, abzugeben.