49. Es sei $f(x,y) = x\sqrt{|y|}$ für $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Warum kann f in $[-1,1] \times [-1,1]$ keine Lipschitzbedingung erfüllen? (4 Punkte)

50. Es sei das Anfangswertproblem $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \ \ \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u_0}$
unter der Standardvoraussetzung (SV) gegeben. Weiter sei $M = \max_K \|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})\|$ und $L = \max_K \|D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(x,\mathbf{y})\|$, wobei K den Zylinder $[\xi-\delta, \xi+\delta] \times \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{u_0}\| \le R\}$ mit der Bedingung $M \cdot \delta \le R$ bezeichnet.
   (a) Beweisen Sie die Fehlerabschätzung
   $$\|\mathbf{u} - \mathbf{u_k}\| \le M \cdot L^k \cdot \frac{|x-\xi|^{k+1}}{(k+1)!}$$
   für die Lösung $\mathbf{u}$ und die Picard-Lindelöf-Iterierten $\mathbf{u_k}$ von Satz (12.12) der Vorlesung.
   (b) Beweisen Sie die Wachstumsschranke
   $$\|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u_0}\| \le R \cdot e^{L|x-\xi|} \le Re^{L\delta}$$
   für die Lösung $\mathbf{u}$. (8 Punkte)

51. Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$
   (a) Zeichnen sie das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung, d.h. eine Schar von kleinen Tangentenstücken für die Lösungskurven im Rechteck $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$. Es empfiehlt sich, dies auf *Isoklinen* $x^2 + y^2 = r^2$ für mehrere Werte von r auszuführen, etwa in Schritten $\Delta r = 0,2$ oder besser $\Delta r = 0,1$ und dabei einen nicht zu kleinen Maßstab zu wählen.
   Skizzieren Sie mit Hilfe des Richtungsfelds die Lösung des AWP für $x \in [-1,1]$.
   (b) Berechnen Sie die Picard-Lindelöf-Iterierten y_0, y_1, y_2, y_3 des AWP.
   (c) Schätzen Sie den Fehler $|y - y_3|$ für die exakte Lösung y auf dem x-Intervall $[-r, r]$ mit $r = 0,5$ auf folgende Weise ab:
   (i) Bestimmen Sie ein minimales R so, dass die Ungleichung
   $$M \cdot r \le R \text{ mit } M = \max\{|x^2 + y^2| \mid |x| \le r, |y| \le R\}$$
   erfüllt ist. Dies sichert, dass das Rechteck $K = K(R) = [-r, r] \times [-R, R]$ die Funktionsgraphen der (unbekannten) exakten Lösung y und aller Picard-Lindelöf-Iterierten y_k enthält.
   (ii) Verwenden Sie die Fehlerabschätzung von Übungsaufgabe 50. (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Montag, dem 29. Januar 2007, abzugeben.