W.Knapp Tübingen, den 12. April 2008

1. Wiederholen Sie – ausgehend von den natürlichen Zahlen – die erforderlichen Konstruktionsschritte für die Kette von Zahlbereichserweiterungen
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Betrachten Sie dabei jeweils sowohl die algebraischen Operationen als auch die Anordnungsrelation.

   *Hinweis*: $\mathbb{Z}$ ist der „Differenzenring" zum Halbring $\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}$ ist der Quotientenkörper des Integritätsbereichs $\mathbb{Z}$. $\mathbb{R}$ lässt sich aus $\mathbb{Q}$ als die Menge aller Dedekindschen Schnitte von $\mathbb{Q}$ konstruieren oder als der Faktorring der Fundamentalfolgen (= Cauchy-Folgen) in $\mathbb{Q}$ modulo den Nullfolgen.

2. Unter einem angeordneten Körper $(K, <)$ verstehen wir folgendes:
   Für einen Körper $K$ gilt $K = P \uplus \{0\} \uplus -P$, wobei $-P = \{-x \mid x \in P\}$, mit einer Teilmenge $P$ von $K$, welche die Eigenschaft
   $\forall x, y \in P\ x + y \in P$ und $xy \in P$ besitzt (*Positivbereich*).
   Hierdurch wird eine lineare Anordnung $<$ von $K$, die mit der Addition und der Multiplikation in $K$ verträglich ist, definiert via $x < y :\Longleftrightarrow y - x \in P$.
   Damit gilt $P = \{x \mid x \in K \text{ und } x > 0\}$.
   Mit $x \leq y :\Longleftrightarrow x = y$ oder $x < y$ ist dann in $K$ eine lineare Ordnungsrelation im üblichen Sinne gegeben.

   Wir betrachten die folgenden Axiome:
   (R1) $(K, <)$ ist ein angeordneter Körper.
   (R2) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $K$ besitzt ein Supremum in $K$ bezüglich $\leq$.
   (R3) $(K, <)$ ist archimedisch geordnet (d.h. wenn $a, b > 0$ ist, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $b < na$ gilt) und jede Fundamentalfolge in $K$ konvergiert in $K$.

   (a) Klären Sie die genaue Bedeutung dieser Aussagen.
   (b) Beweisen Sie, dass für einen angeordneten Körper $(K, <)$ die Axiome (R2) und (R3) gleichwertig sind.
   (c) Beweisen Sie, dass für den gemäß Aufgabe 1 konstruierten Körper $K = \mathbb{R}$ alle drei Axiome erfüllt sind.

3. Beweisen Sie: Sind $K_1$ und $K_2$ zwei Körper, welche die Axiome (R1) und (R2) erfüllen, so gibt es genau einen Körperisomorphismus von $K_1$ auf $K_2$, welcher überdies die Anordnung respektiert.

   Insbesondere besitzt der gemäß Aufgabe 1 konstruierte Körper $\mathbb{R}$ nur die Identität als Automorphismus. Die reellen Zahlen werden demnach durch die Axiome (R1) und (R2) bzw. durch (R1) und (R3) bis auf Isomorphie charakterisiert.

   **Die Übungsaufgaben sind für die ersten Übungsstunden vorzubereiten. Keine Abgabe!**