W.Knapp Tübingen, den 22. April 2008

4. Beweisen Sie: Wenn $(K,<)$ ein angeordneter Körper ist, so gilt $\operatorname{char} K = 0$ und das Polynom X^2+1 hat keine Nullstelle in K (man sagt hierfür kurz: $\sqrt{-1} \notin K$). Insbesondere lässt sich ein endlicher Körper oder ein algebraisch abgeschlossener Körper wie etwa $\mathbb{C}$ nicht anordnen.

5. Ein kommutativer Körper K heißt *pythagoräisch* genau dann, wenn alle Summen von (zwei) Quadraten in K wiederum Quadrate in K sind; K heiße *reell pythagoräisch* genau dann, wenn K pythagoräisch ist und $\sqrt{-1} \notin K$ ist.
Klar: $\mathbb{R}$ ist reell pythagoräisch. Es gibt aber noch verschiedenartige andere Körper mit dieser Eigenschaft. Nun sei K ein reell pythagoräischer Körper und $1 < n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:
   (a) $(K,<)$ ist ein angeordneter Körper mit Positivbereich $P = \{t^2 \mid 0 \neq t \in K\}$ im Sinne von Übungsaufgabe 2.
   (b) Im Vektorraum K^n ist das euklidische Skalarprodukt $K^n \times K^n \to K : (x,y) \mapsto x \bullet y = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$ definiert mit den aus der Linearen Algebra bekannten Eigenschaften. Insbesondere hat die Funktion $K^n \to K : x \mapsto \|x\| := \sqrt{x \bullet x}$ (≥ 0) die bekannten Eigenschaften einer Norm.
   (c) Sind x und y von 0 verschiedene Vektoren in K^n, so setze $w(x,y) := \frac{x \bullet y}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Für $0 < r, s \in K$ gilt $w(rx, sy) = w(x,y)$. Stets gilt $-1 \leq w(x,y) \leq 1$. Wann gilt $w(x,y) = 1$, wann $w(x,y) = -1$ und wann $w(x,y) = 0$?

   Man kann demnach die „Größe“ von Winkeln zwischen von Null verschiedenen Vektoren genau so wie im Spezialfall der reellen Zahlen messen.

6. $(K,<)$ sei ein angeordneter Körper.
Setze $\operatorname{Eb}(K,<) := (K^2, a_1K^2; \mathrm{I}, \perp, \mathcal{Z})$ mit
$a_1K^2 = \{u + Kv \mid u, v \in K^2 \text{ und } v \neq 0\}$, $\mathrm{I} := \{(x, u + Kv)) \mid x \in u + Kv\}$,
$\perp := \{(u + Kv, u' + Kv') \mid v \bullet v' = 0\} \subseteq a_1K^2 \times a_1K^2$ und
$\mathcal{Z} = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in K^2, x \neq z \text{ und } \exists_{t \in K} \text{ mit } 0 < t < 1 \text{ und } y = x + t(z-x)\}$.
Beweisen Sie, dass $\operatorname{Eb}(K,<)$ eine angeordnete metrische Ebene ist. (8 Punkte)

7. Seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte in einer angeordneten (metrischen) Ebene. Gelte $A' \in \langle AC \rangle \setminus \{C\}$ und $B' \in \langle BC \rangle \setminus \{C\}$. Beweisen Sie:
Für jedes $X \in \langle AB \rangle$ schneidet die Strecke $\langle XC \rangle$ die Strecke $\langle A'B' \rangle$ in einem Punkt X' derart, dass die Abbildung $\langle AB \rangle \to \langle A'B' \rangle : X \mapsto X'$ bijektiv ist und die Zwischen-Beziehung von Punkten respektiert. (4 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Fälle $A = A'$ und $B = B'$.

Die Übungsaufgaben 4 und 5 sind für die Übungsstunden vorzubereiten. Die Übungsaufgaben 6 und 7 sind am Dienstag, dem 6. Mai 2008, vor der Vorlesung abzugeben.