# Übungen zur Kursvorlesung für Lehramtsstudierende
# Anordnungsaspekte in der Elementargeometrie

Sommersemester 2008 — Blatt 3

W.Knapp — Tübingen, den 3. Mai 2008

8. Beweisen Sie Satz (2.9) der Vorlesung:
   Ist $\mathcal{E}$ eine angeordnete metrische Ebene und $P$ ein Punkt von $\mathcal{E}$, die zugehörige Punktspiegelung sei $\eta_P$. Dann liegt für alle Punkte $X \neq P$ der Punkt $P$ zwischen $X$ und $X^{\eta_P}$. (2 Punkte)

9. Bezeichne $\mathcal{H}$ die reelle hyperbolische Ebene im Modell nach Klein-Beltrami, siehe (1.11)(3) der Vorlesung.
   Wie muss die Zwischen-Relation $\mathfrak{Z}$ in $\mathcal{H}$ definiert werden, damit $\mathcal{H}$ zu einer angeordneten metrischen Ebene wird?

   Im folgenden sei stets $\mathcal{E}$ eine angeordnete metrische Ebene Punktmenge $\mathcal{P}$ und Zwischenrelation $\mathfrak{Z}$.

10. Eine Teilmenge $\mathcal{M}$ der Punktmenge $\mathcal{P}$ von $\mathcal{E}$ heiße *konvex* genau dann, wenn für alle $X, Y \in \mathcal{M}$ mit $X \neq Y$ stets $\langle XY \rangle \subseteq \mathcal{M}$ gilt.
    Beweisen Sie:
    (a) $\mathcal{P}$ und $\emptyset$ sind konvex.
    (b) Der Durchschnitt einer jeden nichtleeren Familie konvexer Punktmengen ist konvex.
    (c) Jede Punktmenge $\mathcal{M}$ besitzt eine konvexe Hülle $\langle \mathcal{M} \rangle$, d. h. eine kleinste konvexe Obermenge von Punkten.
    (d) Beschreiben Sie die konvexe Hülle von $\{A\}$, $\{A, B\}$ und $\{A, B, C\}$ wobei $A, B, C$ drei verschiedene Punkte sind. (6 Punkte)

    *Hinweis*: In (d) müssen Sie eine Fallunterscheidung vornehmen.

11. Seien $g$ und $g'$ zwei Geraden, die sich in keinem Punkt schneiden. $A$ sei ein mit $g$ inzidenter Punkt und $A'$ ein mit $g'$ inzidenter Punkt. Dann gibt es eine Punkt $C$ derart, dass $(A, A', C) \in \mathfrak{Z}$ gilt.
    Beweisen Sie:
    (a) Für jedes $X \in [g]$ schneidet die Verbindungsgerade $CX$ die Gerade $g'$ in einem Punkt $X'$ zwischen $C$ und $X$.
    (b) Die Abbildung $\pi : [g] \to [g'] : X \mapsto X'$ ist injektiv und respektiert die Zwischenrelation $\mathfrak{Z}$; $\pi$ ist deshalb bei geeigneter Wahl der Zwischenanordnungen auf $g$ und $g'$ eine streng monoton wachsende Abbildung.
    (c) Zeigen Sie am Beispiel der reellen hyperbolische Ebene $\mathcal{H}$, dass die Abbildung $\pi$ nicht notwendigerweise surjektiv ist. (4 Punkte)

Die Übungsaufgabe 9 ist für die Übungsstunden vorzubereiten. Die Übungsaufgaben 8, 10 und 11 sind am Dienstag, dem 20. Mai 2008, vor der Vorlesung abzugeben.